This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE SCHRIFTEN
FÜR INGENIEURE UND STUDIERENDE
HERAUSGEGEBEN VON H. LORENZ
11

MATHEMATISCHE INSTRUMENTE

VON

PROF. DR. A. GALLE

4.80

Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende.

Herausgegeben von Dr. E. Jahnke.

LELAND·STANFORD·JVNIOR·VNIVERSITY

V. Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Von Dr. E. Jahnke, Professor an der Kgl. Bergakademie Berlin, und F. Emde, Ingenieur in Berlin. gr. 8. 1909. In Leinwand geb. ℳ 6.—

In dem vorliegenden Werk findet man das bisher schwer zugängliche Tafelmaterial für eine ganze Reihe von Transzendenten, wie Hyperbel-

funktionen, Sinus- und Cosinus-Integral, Integrallogarithmus, Gammafunktion, Fehlerintegral, Fresnelsche Integrale, elliptische Integrale und Funktionen, Kugelfunktionen und Besselsche Funktionen, vermehrt um eine Reihe neuberechneter Tafeln, die sich vornehmlich auf die Besselschen Funktionen beziehen. Sämtliche Tafeln sind in Kurven umgesetzt worden. Auch die notwendigsten Formeln sind beigegeben worden.

VI. 1 u. 2. **Die Vektoranalysis u. ihre Anwendungen in der theoretischen Physik.** Von Dr. W. v. Ignatowsky in Berlin. 2 Teile. I. Teil: Die Vektoranalysis. 8. 1909. — II. Teil: Anwendung der Vektoranalysis in der theoretischen Physik. 8. 1910. Steif geh. je ℳ 2.60, geb. je ℳ 3.—

Der erste Teil enthält die Vektoranalysis von einem einheitlichen Standpunkte aus betrachtet, der zweite die Darstellung einiger Gebiete der theoretischen Physik mit Hilfe der Vektoranalysis. Hier finden sich Kapitel über die Mechanik diskreter Massenpunkte, starrer, elastischer und flüssiger Körper. Zum Schlusse wird noch die Maxwell-Hertzsche Elektrodynamik und die Kristalloptik behandelt.

VII. **Die Theorie der Kräftepläne.** Von Dr. H. E. Timerding, Professor an der Technischen Hochschule in Braunschweig. 8. 1910. Steif geh. ℳ 2.60, in Leinwand geb. ℳ 3.—

Der Verfasser hat innerhalb der Methoden der elementaren Statik ein Eingehen auf alle prinzipiellen Fragen und eine möglichst vollständige Berücksichtigung der vielen einschlägigen Untersuchungen angestrebt.

VIII. **Mathematische Theorie d. astronomischen Finsternisse.** Von Dr. P. Schwahn, Direktor der Gesellschaft und Sternwarte „Urania" in Berlin. 8. 1910. Steif geb. ℳ 3.20, geb. ℳ 3.60.

Das Buch setzt die Kenntnis der sphärischen Astronomie voraus und behandelt in klarer und anschaulicher Weise die Theorie und Berechnung der Mondfinsternisse, Planetenbedeckungen, Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen. Insbesondere ist die Vorausbestimmung der Sonnenfinsternisse und ihrer Sichtbarkeitsgrenzen nach Bessels elegantes Methode eingehend dargestellt worden. Die theoretischen Erörterungen sind stets von praktischen Rechnungen begleitet.

IX. **Die Determinanten.** Von Geh. Hofrat Dr. E. Netto, Prof. an der Univ. Gießen. 8. 1910. Steif geh. ℳ 3.20, geb. ℳ 3.60.

Eine allgemeinverständliche kurze Einführung an Hand einfacher Fälle.

X. **Einführung in die kinetische Theorie d. Gase.** Von Dr. A. Byk, Professor an der Universität und Technischen Hochschule Berlin. In 2 Teilen. I. Teil: Die idealen Gase. gr. 8. 1910. Steif geh. ℳ 2.80, geb. ℳ 3.20. — II. Teil. (In Vorbereitung.)

Das Buch möchte eine Mittelstellung zwischen den großen Werken über Gastheorie und den ganz kurzen Darstellungen des Gegenstandes einnehmen. Der vorliegende erste Teil behandelt die idealen einatomigen Gase und ist so weit in sich abgeschlossen.

XI. **Grundzüge der mathemat.-physikalischen Akustik.** Von Prof. Dr. A. Kalähne, Dozent der Physik an der Technischen Hochschule Danzig. In zwei Teilen. I. Teil. 8. 1910. Steif geh. ℳ 3.20, geb. ℳ 3.60.

Eine kurze Darstellung der theoretischen Akustik, zu deren Studium man sonst auf umfangreiche Werke angewiesen ist. Der erste Band behandelt nach einem einleitenden Kapitel über Schwingungen und Wellen die harmonische Analyse durch Fourierscher Reihen, die musikalische Gliederung des Tonbereichs und die Schwingungstheorie des einfachen Massenpunktes und der aus mehreren Massenpunkten bestehenden „gekoppelten" Systeme.

XII. **Die Theorie der Wechselströme.** Von Prof. Dr. Ernst Orlich. Geh. ℳ 2.40, geb. ℳ 2.80.

Das Buch behandelt die verschiedenen Methoden der mathematischen Darstellung der Wechselströme und im besonderen die Grenzen, bis zu denen diese Darstellungen als genau anzusehen sind. Es enthält also gewissermaßen eine Theorie der einfach periodischen Funktionen unter dem Gesichtswinkel der praktischen Probleme der Wechselströme und mit Anwendungen auf diese.

XIII. **Theorie der elliptischen Funktionen.** Von Dr. Martin Krause, Professor an der Kgl. Sächs. Techn. Hochschule zu Dresden. Unter Mitwirkung von Prof. Dr. Emil Naetsch. 8. 1912. Geh. ℳ 3.60, geb. ℳ 4.—

Das Werk enthält eine kurz gefaßte Theorie derjenigen Teile der elliptischen Transzendenten, die für die Anwendungen von besonderer Bedeutung sind.

XIV. **Konforme Abbildung.** Von Dr. L. Lewent, weil. Oberlehrer in Berlin. Herausgegeben von Dr. Eugen Jahnke, ord. Prof. an der Kgl. Bergakad. Berlin. Mit einem Beitrag von Privatdozent Dr. W. Blaschke in Greifswald. 8. 1912. Geh. ℳ 2.80, geb. ℳ 3.20.

Die Schrift soll die Kluft überbrücken helfen, die noch immer zwischen der reinen und angewandten Mathematik gähnt. Von Herrn Blaschke stammt die Darstellung der konformen Abbildung durch elliptische Funktionen.

XV. **Mathematische Instrumente.** Von Professor Dr. A. Galle in Potsdam. gr. 8. 1912. Geh. u. geb.

Außer in den enzyklopädischen Darstellungen fehlte bei uns in Deutschland noch immer eine zusammenfassende Darstellung der namentlich in neuerer Zeit in großer Zahl konstruierten mathematischen Instrumente. Die vorliegende Bearbeitung ist bestimmt, diese Lücke in unserer Literatur auszufüllen.

In Vorbereitung befinden sich folgende Bände:

Die Randwertaufgaben in der theoret. Physik. Von Debye.

Potentialtheorie. Von Gans.

Dispersion und Absorption des Lichtes. Von Goldhammer. [Unter der Presse.]

Getriebelehre. Von Grübler.

Schwingungsprobleme. Von Grüneisen.

Festigkeitsprobleme d. modernen Maschinentechnik. Von v. Karman.

Thermoelektrizität. Von Krüger.

Einführung in die Elastizitätstheorie. (2 Teile.) Von Marcolongo.

Technische Hydromechanik. (2 Teile.) Von v. Mises.

Aus der Berufsgeschichte des Ingenieurs an Hand seiner Werke. Von Matschoß.

Grundlagen der Zeit- und Ortsbestimmungen. Von Möller.

Die Streuung des Transformators. Von Hagowski.

Die Fourierschen Reihen. Von Rothe.

Die partiellen Differentialgleichungen. Von Rothe.

Die Theorie der Ionisation der Gase. (2 T.) Von Römelin.

Ausgewählte Spannungsprobleme des Bauingenieurs. Von Timpe.

Die Sammlung wird fortgesetzt.

510.
G16

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE SCHRIFTEN
FÜR INGENIEURE UND STUDIERENDE
HERAUSGEGEBEN VON E. JAHNKE
15

MATHEMATISCHE INSTRUMENTE

VON

PROF. DR. A. GALLE
ABTEILUNGSVORSTEHER AM KGL. GEODÄTISCHEN INSTITUT
ZU POTSDAM

MIT 86 ABBILDUNGEN UND FIGUREN

STANFORD LIBRARY

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912

194627

STANFORD LIBRARY

COPYRIGHT 1912 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Unter den Errungenschaften der Technik nehmen die mathematischen Instrumente insofern eine besondere Stellung ein, als sie der Geistestätigkeit des Menschen einen Teil der Arbeit abnehmen. Manche von ihnen, z. B. die Planimeter, sind für bestimmte Aufgaben unersetzbar geworden, andere, wie die Analysatoren, sind geeignet, gewisse Zusammenhänge klarer hervortreten zu lassen, als sie die Rechnung ohne weiteres zeigt. Der Nutzen der meisten Apparate gibt sich bei häufiger Wiederholung derselben Operation in einer beträchtlichen Zeitersparnis zu erkennen. Auch wenn die erforderliche Genauigkeit in einigen Fällen nicht durch das Instrument erreicht wird, so dient die dadurch erlangte Prüfung zur Sicherung des Ergebnisses der Rechnung.

Dem Scharfsinn, mit dem diese Hilfsmittel erdacht sind, und der Feinheit und Genauigkeit ihrer Herstellung wird man die Bewunderung nicht versagen können. Hieraus entspringt der Wunsch, die Grundlagen und Einzelheiten ihrer Konstruktion kennen zu lernen. Die Kenntnis der Zusammensetzung der Apparate wird aber dann notwendig, wenn es sich um die Prüfung ihrer Genauigkeit und Zuverlässigkeit handelt. Für einzelne Aufgaben kann eine solche Untersuchung eine Arbeitsvermehrung bedeuten, bei häufiger Anwendung des Instrumentes fällt sie aber kaum ins Gewicht.

Beschreibungen und Erklärungen sind für viele Instrumente aus Anlaß von Ausstellungen und im Auftrage von Präzisionswerkstätten in Katalogen veröffentlicht worden. Einige Enzyklopädien geben, neben Literaturnachweisen, meist in knapper Form eine Übersicht über die vorhandenen Konstruktionen zur raschen Orientierung des Fachmannes. Es fehlt jedoch eine zusammenhängende Darstellung der Einrichtungen dieser Instrumente mit Erklärungen und Hinweisen auf ihre Anwendung, die als Einführung in diesen Zweig der Technik dienen könnte. Diese Lücke beabsichtigt das vorliegende Bändchen auszufüllen, das in denjenigen Abschnitten, die es erlauben, so allgemein verständlich wie möglich gehalten ist.

Allerdings war auch hier eine Beschränkung wegen der großen Ausdehnung des Gebietes geboten; die Auswahl des Stoffes läßt das Inhaltsverzeichnis erkennen. Insbesondere wurden die mathemati-

schen Zeicheninstrumente trotz darauf bezüglicher Vorarbeiten ausgeschieden, da sie den Umfang des Buches nahezu verdoppelt hätten.

Der Verfasser hat sich einer vielseitigen Unterstützung erfreut, für die er allen beteiligten Herren seinen lebhaften Dank auszusprechen sich erlaubt. Durch das freundliche Entgegenkommen der Verfertiger und Besitzer von Instrumenten war es ihm vergönnt, auch solche Konstruktionen, die er nicht durch eigene Anwendung kannte, in Augenschein zu nehmen. Im Deutschen Museum in München wurde es ihm in entgegenkommender Weise ermöglicht, auch ältere Instrumente kennen zu lernen. Leider fehlt in Deutschland eine dauernde Ausstellung, die eine Besichtigung und womöglich Erprobung der neuen Instrumente erlaubte.

Zu nicht geringem Danke ist der Verfasser den Herren Autoren, Verlegern und Konstrukteuren verpflichtet, die Abhandlungen, Abbildungen und Klischees gütigst zur Verfügung gestellt haben. Dem Vorteil gegenüber, daß vielfach Originalabbildungen wiedergegeben werden, kommt der geringe Nachteil kaum in Betracht, daß die Bezeichnungen nicht überall dem Texte angepaßt werden konnten.

Endlich gedenkt der Verfasser mit besonderem Danke derer, die ihm bei der Drucklegung mit Rat und Tat zur Seite standen, unter ihnen besonders der Herren Dr. Schweydar und Prof. Dr. Peters.

Potsdam, im Juli 1912.

A. Galle.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

I. Abschnitt.

Arithmetische Apparate mit logarithmischer Skala 1-22

1. Logarithmischer Rechenschieber 1
2. Bestandteile nach ihrer geschichtlichen Entwicklung 3
3. Teilungen 5
4. Stellenzahl 9
5. Theorie 10
6. Das Rechnen mit dem Stabe 12
7. Einige besondere Rechenschieber 16
8. Instrumente von anderer Form 21

II. Abschnitt.

Rechenmaschinen . 23-48

9. Vorzüge des Rechnens mit Rechenmaschinen 23
10. Zählwerk 23
11. Zehnerübertragung . . . 24
12. Schaltwerk 25
13. Einteilung der Rechenmaschinen 28
14. Thomas - Burkhardtsche Maschine 29
15. Divisionsmaschine Mercedes-Euclid 30
16. Odhners Arithmometer. . 33
17. Rechenmaschine Gauß . 34
18. Sellings Maschine 37
19. Multiplikationsmaschine Millionär 39
20. Differenzenmaschinen . . 44
21. Anforderungen an eine Rechenmaschine 48

Seite

III. Abschnitt.

Die Meßrolle . . 48-52

22. Einrichtung und theoretische Grundlagen 48
23. Verschiedene Mechanismen und Ersatz der Rolle durch Zylinder usw. 50

IV. Abschnitt.

Stetige Rechenapparate. 53-59

24. Addition und Subtraktion 53
25. Multiplikation und Division 54
26. Quadratwurzelziehung . . 55
27. Logarithmierung 56
28. Trigonometrische und hyperbolische Funktionen . 56

V. Abschnitt.

Differentialapparate. 59-62

29. Zweck 59
30. Rollen- und Scheibenmechanismus 59
31. Rollen- und Kugelmechanismus 61

VI. Abschnitt.

Kurvenmesser . . 62-66

32. Kurvenmesser 62

VII. Abschnitt.

Flächenmesser. 66-131

33. Flächentafeln 66
34. Harfenplanimeter und ähnliche 66
35. Verwandlungsplanimeter. 69
36. Planimeter mit Integrierrolle 70

Seite

37. Theorie dieser Instrumente 71
38. Koordinatenplanimeter . 77
39. Linearplanimeter 87
40. Polarplanimeter 99
41. Kompensationsplanimeter 110
42. Verschiedene andere Planimeter mit Integrierrolle 111
43. Momentenplanimeter . . 118
44. Schneidenplanimeter und Abarten 122

VIII. Abschnitt.

Apparate zur harmonischen Analyse. 131-154

45. Allgemeines und Verwendung des Planimeters . 131
46. Analysatoren von Yule . 134
47. Apparat von Le Conte . 137
48. Analysator von W. Thomson 138

Seite

49. Analysator von Henrici-Coradi 140
50. Analysator von Sharp . 143
51. Präzisionsinstrument von Sommerfeld und Wiechert 145
52. Analysator von Michelson und Stratton. 148
53. Apparat von Terada zur Analyse und Synthese von Schwingungen 152

IX. Abschnitt.

Integraphen . 154-178

54. Grundlagen 154
55. Instrument von Abdank-Abakanowicz 157
56. Integrator von Pascal. . 161
Polarintegraph 171
57. Integratoren für Differentialgleichungen 172

I. Abschnitt.

Arithmetische Apparate mit logarithmischer Skala.

1. Logarithmischer Rechenschieber. (Rechenstab, règle à calcul, règle logarithmique, slide rule, regola calcolatore). Eine Logarithmentafel läßt sich auf verschiedene Arten durch eine

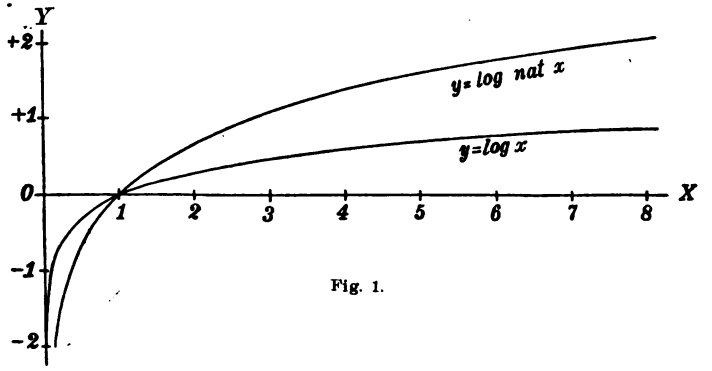


Fig. 1.

graphische Darstellung ersetzen. Betrachtet man die Zahlen als Abszissen und die Logarithmen als Ordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, so erhält man die logarithmische Kurve (curva logistica), mit deren Hilfe man die zueinander gehörenden Numeri und Logarithmen ablesen kann (Fig. 1). Auch der Übergang von gemeinen (Briggschen) zu natürlichen (Napierschen) Logarithmen kann in der Weise erreicht werden, daß man beide logarithmischen Kurven für dieselben Abszissen darstellt; die Kurve der natürlichen Logarithmen zeichnet sich vor allen auf eine andere Grundzahl bezogenen dadurch aus, daß sie die Abszissenachse unter dem Winkel $\tau = 45^0$ schneidet[1]).

1) Für $y = \lg x$ ist nämlich $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\tau = \frac{1}{x}$, also für $x = 1$ $(y = 0)$ $\tau = 45^0$. Im allgemeinen ist $\operatorname{tg}\tau =$ Modulus, also für Briggsche Logarithmen (Mod $= 0{,}43429$) $\tau_B = 23^0\ 28',5$.

Wenn man in der allgemeinen Gleichung der Logistik $y = a \lg \frac{x}{a}$ in rechtwinkligen Koordinaten r und φ statt x und y schreibt, so erhält man $r = a e^{\frac{\varphi}{a}}$ die Gleichung der logarithmischen Spirale in Polarkoordinaten. Wenn die Polarwinkel φ in arithmetischer Progression wachsen, so nehmen die zugehörigen Leitstrahlen in geometrischer Progression zu. Geht man also von einem Leitstrahl aus, der die Längeneinheit darstellt und schlägt mit ihm als Radius einen Kreis, so erhält man die Kreisbogenlängen als Logarithmen der durch ihre Endpunkte gelegten Leitstrahlen der Kurve.

Ganz allgemein sind bei Zuordnung einer arithmetischen Reihe, die mit 0 anfängt, zu einer geometrischen Reihe, die mit 1 beginnt, die Glieder der ersteren die Logarithmen der Glieder der geometrischen Reihe und hierauf beruhte die Einrichtung der „Progreßtabuln", der Vorläuferinnen der Logarithmentafeln. In Anlehnung an diese Tafeln nach Byrgi (Byrgius 1552—1632) und Napier[1]) (Lord Napier of Merchiston 1550—1617) entstand der Progreßstab als erster Rechenstab.

Für gemeine Logarithmen entspricht z. B. einer arithmetischen Reihe mit der Differenz 0,1 eine geometrische mit dem Exponenten 1,259 (untere Seite der Figur 2 I). Die Strichintervalle sind die graphische Darstellung der Glieder der geometrischen Reihe (Potenzen von 10), während die den Teilstrichen beigefügten Zahlen (die Exponenten von 10) in arithmetischer Reihe wachsen. Liest man zu den Zahlen der arithmetischen Reihe (den Logarithmen) die etwa auf Millimeterpapier gezeichnete Skala ab, so erhält man durch Schätzung von Zehntelmillimetern die Numeri auf drei Stellen, und die Doppelskala, in der (oben in Figur 2 I) die runden Zahlen (Numeri) eingeschrieben sind, ersetzt eine Antilogarithmentafel.

Wenn man umgekehrt die Glieder der arithmetischen Reihe (Logarithmen) auf eine Skala aufträgt und nur die Teilung und Bezifferung der geometrischen Reihe beifügt, so kann man die Logarithmen abgreifen und graphisch addieren oder subtrahieren. Auf diese Weise erhält man eine Skala, mit der man logarithmische Operationen ausführen kann, ohne die Logarithmen zahlenmäßig zu kennen (oben in Fig. 2 II).

Um einen Ersatz für die Logarithmentafel zu bekommen, muß

1) Oft Neper genannt. Über den Progreßstab vgl. C. H. Müller, ferner Kewitsch, Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, 1896, S. 333.

man noch die Bezifferung und Teilung der arithmetischen Reihe hinzufügen, wie sie unten in der Skala II der Figur 2 angegeben ist. Diese bei den eigentlichen Rechenschiebern als L-Skala bezeichnete Skala wird, wie wir sehen werden, verhältnismäßig selten in Anwendung kommen. In beiden Doppelskalen, I und II der Figur 2, stehen oben die Zahlen, unten die Logarithmen. Die erste (I) entspricht dem Progreßstabe, die zweite (II) dem Rechenschieber.

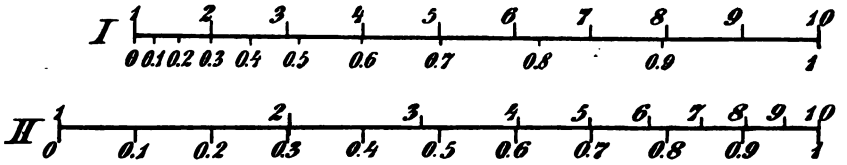


Fig. 2.

2. Bestandteile nach ihrer geschichtlichen Entwicklung. Die erste Form eines solchen Rechenstabes stammt von Gunter (1581—1626: Gunters scale oder Gunters line) und hat sich noch für besondere Zwecke als Navigation scale erhalten. Diese Skala erfordert die Verwendung eines Zirkels, dessen Spitzen in Löcher auf Messingplättchen eingesetzt werden. Man greift die Längen der Logarithmen ab und setzt sie additiv oder subtraktiv aneinander. Die so erhaltene Länge trägt man vom Anfangspunkt ab, und kommt so gemäß den Regeln $\log a + \log b = \log (a \cdot b)$ und $\log a - \log b = \log \left(\frac{a}{b}\right)$ auf die Zahl $a \cdot b$ oder $\frac{a}{b}$, welche das Produkt oder den Quotienten der zuerst abgegriffenen Zahlen darstellt. Weil man aber zuweilen über die eigentliche Skala hinwegspannen muß, so ist ein Verlängerungsbrettchen unentbehrlich. Um den Zirkel zu vermeiden, führte Oughtred (1574—1660)[1]) den Doppelstab ein, der zwei vollständig gleiche, aneinander verschiebbare Skalen besaß. Die erste größere technische Ausführung wurde auf Anregung von James Watt um 1770 in der Metallwarenfabrik in Soho verwendet (Soho Rules). Um 1650 gab Seth Patridge dem Stabe die noch heute übliche Gestalt durch Einfügung der *Zunge* (des Schiebers), die in Felgen des eigentlichen Stabes gleitet,

1) Bisher wurde dies Wingate (1593—1656) zugeschrieben, obige Angabe macht Hammer (Zeitschr. f. Vermessungsw., 40, S. 27).

wodurch eine sichere Führung der Skalen aneinander erreicht wird. Auf diese Weise war für vier Skalen Raum vorhanden, wobei die obere Stab-(A) und die obere Zungenteilung (B) gleich waren, ebenso die untere Zungenteilung (C), während die untere Teilung (D) auf dem Stabe den doppelten Maßstab besaß. Durch die Firma Tavernier[1]) in Paris wurden die je zwei aneinander liegenden Skalen (Fig. 3) genau gleich ($A = B$ und $C = D$) und zwar C und D in doppeltem Maßstab wie A und B ausgeführt[2]), so daß die Zahlen A und B die Quadrate der darunter stehenden Zahlen C und D sind, also ein bequemes Hilfsmittel zum Quadrieren und Quadratwurzel-Ausziehen bieten. Zuerst wird die Hinzufügung einer quadratischen Skala von Lambert[3]) erwähnt.

Um nun die Übertragung zwischen nicht aneinander liegenden Skalen zu ermöglichen, oder sicherer zu gestalten, kam der von Mannheim[4]) 1851 selbständig erfundene, aber auch schon früher benutzte *Läufer* (courseur) hinzu, der auch zum Festhalten einer Einstellung bei Verschiebung der Zunge wichtige Dienste leistet. Er wird entweder als ein verschiebbares Metallstück mit zwei gleichen längs der Fugen zwischen A und B, bzw. C und D hinstreifenden, zugespitzten oder geschärften Zeigern ausgeführt oder in neuerer Zeit in Form eines an zwei oder allen vier Seiten eingefaßten Glasfensters konstruiert, das senkrecht zu den Skalen, also parallel den Teilstrichen einen (oder zwei) auf der Unterseite des Glases eingeritzten Strich trägt (Fig. 3). Durch Federn wird eine sichere Führung des Läufers gewährleistet. Für genauere Ablesung und für schwächere Augen werden auch Läufer mit Lupe oder Zylinderlinse[5]) gefertigt. Als nach dem deutschfranzösischen Kriege auf Anregung von Prof. Goering[6]) (1841—1906) Dennert & Pape in Altona die Verfertigung der aus Frankreich nicht mehr erhältlichen Rechenschieber unternahmen, wurde die wichtige Neuerung, die Teilungen auf Zellhorn (Zelluloid) anzubringen, eingeführt,

1) Anfangs Gravet-Lenoir, dann Tavernier-Gravet, zuletzt Tavernier-Vinay.

2) Figur 3. Im übrigen empfiehlt es sich, den folgenden Erörterungen an der Hand eines Rechenschiebers zu folgen.

3) Beschreibung und Gebrauch der logarithmischen Rechenstäbe. Augsburg 1761 und 1772.

4) Artillerieoffizier in Metz, später Professor in Paris.

5) Nestler in Lahr (Baden).

6) Anleitung zum Gebrauch des Rechenstabs. Gebr. Wichmann in Berlin.

während sie vorher direkt auf Holz, Elfenbein oder Metall aufgetragen waren. Die Bekleidung der Ober- und Unterseite des Stabes mit Zellhorn[1]) dient zur Verhinderung der Krümmung durch Feuchtigkeit; zur Regulierung des Ganges der Zunge werden Stellschrauben[2]) angewendet. Auf diese Weise ist ein nahezu einheitlicher Typus der Rechenschieber aus den ersten Fabriken Deutschlands[3]) entstanden. Die gebräuchlichste Länge beträgt 25 cm oder wenige Zentimeter mehr. Die halbe und doppelte Länge kommen ebenfalls vor, erstere bei Tascheninstrumenten[4]) von geringerer Genauigkeit, letztere an der Grenze der Handlichkeit.

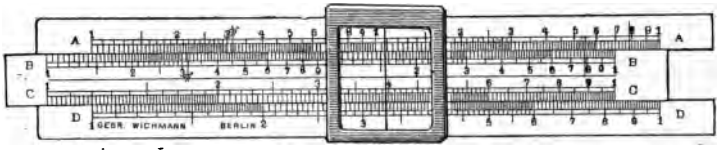


Fig. 3.

3. Teilungen. Die unteren Skalen *C* und *D* enthalten die logarithmischen Längen für die Zahlen 1 bis 10. Diese Längen[5]) sind von den Anfangspunkten aus abgetragen und an den Teilstrichen sind die Zahlen angeschrieben. Nur an Stelle von 10 steht wieder 1, da der dekadische Logarithmus von 1 und 10 nur durch die Kennziffer unterschieden wird. Da nun die Abstände sich verringern, so war für die Unterabteilungen maßgebend, daß die Intervalle nicht mehr als 1 mm und nicht weniger als 0,5 mm betragen sollen, um die Ablesung möglichst genau, aber die Teilung nicht zu eng zu machen. Infolgedessen konnte (bei 25 cm

1) S. Note 5 S. 4. 2) S. Note 6 S. 4.
3) Wir erwähnen noch A. W. Faber.
4) Figur 3.
5)

Zahl.	Logarithmus	× λ =	Länge
1	0,00000	× 250 =	0,00 mm
2	0,30103	× 250 =	75,26 „
3	0,47712	× 250 =	119,28 „
4	0,60206	× 250 =	150,52 „
5	0,69897	× 250 =	174,74 „
6	0,77815	× 250 =	194,54 „
7	0,84510	× 250 =	211,28 „
8	0,90309	× 250 =	225,77 „
9	0,95424	× 250 =	238,56 „
10	1,00000	× 250 =	250,00 „

Länge der Skala) der Zwischenraum zwischen 1 und 2 in 100 Teile geteilt werden.[1]) Von 2 bis 4 schreiten die Zahlen um 0,02, zwischen 4 und 10 um 0,05 fort. Um die Übersicht nicht zu erschweren, ist bei den Zwischenstrichen (außer bei den Zehnteln von 1 bis 2) die Bezifferung fortgelassen und sind nur längere Striche zur Unterscheidung benutzt worden. Die an einander liegenden Skalen A und B der oberen Hälfte des Stabes und der Zunge sind ganz entsprechend wie C und D konstruiert, nur bestehen sie aus zwei halb so langen (125 mm) einander fortsetzenden, unter sich gleichen Skalen. Man kann daher den Anfangsstrich als 1, den Mittelstrich als 10, den Endstrich als 100 ansehen. Jedoch sind alle drei mit 1 bezeichnet. Der Kürze der Teilungen wegen sind hier die Unterabteilungen an Zahl geringer, indem sie zwischen 1 und 2 um 0,02, zwischen 2 und 5 um 0,05, zwischen 5 und 10 um 0,1 fortschreiten. Außer diesen Zwischenstrichen sind auf den meisten Rechenschiebern noch einige Striche eingetragen, die für besondere Zwecke nützlich sind, oft auch störend empfunden werden, so für $\pi = 3{,}142$ (zugleich zur Verwandlung preußischer Fuß in Meter[2]) dienend), $\varrho'' = 206\,265$, $\varrho' = 3438$ für alte Kreisteilung, $\varrho_{,,} = 636\,620$ für neue Kreisteilung u. a. Die Rückseite der Zunge trägt ebenfalls Teilungen, die entweder bei umgewendet eingeschobener Zunge an den Vorderteilungen oder bei umgewendetem Instrument an Indexstrichen in zwei Ausschnitten der Unterfläche des Stabes links und rechts abgelesen werden. Die obere dieser Teilungen auf der Rückseite der Zunge, mit S bezeichnet, gibt die Sinus in der Einheit der A-Teilung, die untere, mit T bezeichnete die Tangenten der Winkel in der Einheit der D-Teilung, während die mittlere, meist L benannte, eine um 0,5 mm gleichmäßig fortschreitende ist. Schiebt man die Zunge umgewendet ein, so daß die S- und A-Teilung an

1) Zahl. Logarithmus $\times \lambda =$ Länge. Diff.

1,00	0,00000	$\times 250 =$	0,00 mm	
1,01	0,00432	$\times 250 =$	1,08 „	1,08
1,02	0,00860	$\times 250 =$	2,15 „	1,07
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
1,98	0,29667	$\times 250 =$	74,17 „	
1,99	0,29885	$\times 250 =$	74,71 „	0,54
2,00	0,30103	$\times 250 =$	75,26 „	0,55

2) Genauer 1 pr. Fuß = 0,3139 m.

einander liegen und Anfangs- und Endstrich gegenüberstehen, so sind die Zahlen $A\,1$ bis $A\,100$, mit 100 dividiert, die Sinus der auf der S-Skala angegebenen Winkel. Diese beginnen mit $0^0\,34',4$[1]), für kleinere Winkel rechnet man mit dem Arcus-Verhältnis ϱ', nämlich $\sin\alpha = \frac{\alpha'}{3438}$ in Minuten. Bis zu 10^0 schreitet die S-Teilung um $5'$, bis 20^0 um $20'$, von 20^0 bis 40^0 um $30'$, von 40^0 bis 70^0 um 1^0 fort, diesem letzten bezifferten Striche folgen die Striche bis 80^0 im Abstande von 2^0, dann noch 85^0 und 90^0. Da die B-Teilung der Zunge identisch mit der A-Teilung des Stabes ist, so entsprechen sich auch die Striche B und S auf der Vorder- und Rückseite der Zunge und da der obere[2]) Indexstrich im rechten Ausschnitt der Unterfläche mit dem Endstrich der Stabteilung auf der Oberseite korrespondiert, so liest man auf der nach rechts[2]) ausgezogenen umgewendeten Zunge die Grade der S-Skala unter dem Endstrich ab, deren Sinus auf der B-Skala bei umgewendetem Instrument am Indexstrich der Unterseite erscheinen. Wenn man die Zunge in der Weise umgekehrt einschiebt, daß die C-Teilung gegenläufig an der A-Teilung, ebenso B an D anliegt, und die Zunge nach links herauszieht, so kann man am Indexstrich des linken Ausschnittes der Unterseite die Grade[3]), deren Ziffern auf dem Kopfe stehen, auf der S-Skala einstellen. Da diesem Indexstrich auf der Oberseite der Anfangsstrich der Stabteilung (A und D) entspricht, so steht hier auf der B-Skala gegenüber dem Anfangsstrich von D der Sinus. Oder man kann, da das herausgezogene Stück der Zunge der Einrückung am rechten Ende gleich ist, ebenso gut dieselbe Zahl auf A über dem Endstrich C der Zunge ablesen, da ja A und B identische Skalen und in dieser Lage gegenläufig sind. Bei normaler Zungenstellung endlich, d. h. bei gleich gerichteten und an einanderliegenden A und B erhält man beim Ausziehen der Zunge nach rechts zu den am Index der Unterseite abgelesenen Gradzahlen S über dem Anfangsstrich von B (auf der Zunge) auf der Stabteilung A die reziproken Werte der Sinus, also

1) $\sin 0^0\,34',4 = 0{,}01$, dem mittleren Stich $A\,10$ entspricht $\sin 5^0\,44',3 = 0{,}1$, dem Endstrich $A\,100$ entspricht $\sin 90^0 = 1$.

2) Links und rechts sind stets so zu verstehen, daß der Anfangspunkt der Stabteilungen (A und D) links liegt, der Endpunkt rechts. Bei umgewendetem Instrument ist dann die der Skale D entsprechende Seite die obere, die der Skale A entsprechende die untere.

3) Z. B. $S\,30^0$, $B\,50:100 = 0{,}5$.

die Kosekanten.[1]) Denn es ist jede Zahl A über dem Anfangsstrich der Zunge (B 1) reziprok zu jeder Zahl B unter dem Endstrich (A 100) des Stabes[2]), und andererseits liegen die entsprechenden Zahlen B der Vorderseite und S der Rückseite der Zunge übereinander.

Die T-Teilung entspricht den C- und D-Skalen, so daß bei umgewendeter Zunge und Anliegen von T und D beim Zusammenfallen der Endstriche die Tangenten[3]) direkt unter den Graden stehen. Dem Anfangsstrich $5^0\,43',8$ von T entspricht die Ablesung 0,1 auf D, dem Endstrich 45^0 D 1. Die T-Teilung schreitet bis 20^0 um $5'$, von 20^0 bis 45^0 um $10'$ fort. Für Winkel kleiner als $5^0\,43',8$ wird tang durch sin ersetzt. Für Winkel größer als 45^0 wird $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^0 - x)}$ gebildet. Die Regeln sind entsprechend denen bei der S-Skala, so daß wir sie kurz aufstellen:

Vorderseite T an D, Rückseite Index links: Für Winkel T gegenüber D 1 ist C gegenüber Index die Tangente.

Vorderseite A, B, C, D in normaler Lage: C gegenüber D 1 ist Tangente von T am linken Index der Rückseite oder auch D gegenüber C 10 Kotangente desselben Winkels.

Vorderseite A, C, B, D bei umgekehrt eingeschobener Zunge: D[4]) gegenüber B 1. Tangente von T (Ziffern auf dem Kopfe) am oberen Index rechts.

Die L-Teilung trägt eine den andern Skalen entgegengesetzt laufende gleichmäßige Teilung und Bezifferung von 0 bis 10 mit 50 Unterabteilungen zwischen je 2 Zahlen. Wendet man und dreht man gleichzeitig die Zunge um, so daß L in gleicher Richtung wie A und D läuft, so kann man mit Hilfe des Läufers zu jeder Zahl D den (beim Zusammenfallen der Endstriche) darüberstehenden Logarithmus (auf dem Kopfe stehend) auf L ablesen. Bequemer liest man bei normaler Zungenlage und nach rechts herausgezogener Zunge am rechten unteren Index der Unterseite den Logarithmus der Zahl D ab, die dem Anfangsstrich (C 1) der Zunge gegenübersteht.[5])

---

1) Zu S 30: A 2 über B 1 : $\operatorname{cosec} 30^0 = 2$.

2) $\log A + \log B = \log 1$.

3) Hier muß man die abgelesenen Zahlen mit 10 dividieren.

4) Oder auch C (auf dem Kopfe stehend) gegenüber A 100.

5) Denn das rechts herausgezogene Stück ist gleich dem eingeschobenen links, also sind die vom Endpunkt des ersteren gemessenen

Zur Verwendung des Rechenschiebers als Zeicheninstrument dient die abgeschrägte obere Kante (neben der *A*-Skala) mit einer 25 cm langen Millimeterteilung, deren Endstriche mit denen der Stabteilungen zusammenfallen. Die gerade Kante des Instrumentes (an der *D*-Skala) ist dagegen ihrer ganzen Länge nach (der auch die Länge der Zunge gleich ist) in Millimeter geteilt. Zieht man die Zunge heraus, so setzt sich ihre Länge an der dadurch sichtbar werdenden Bodenfläche fort, die also mit der Zungenlänge zusammen einen Maßstab von doppelter Länge des Instruments (etwa 50 cm) darstellt.

4. Stellenzahl. Für alle Rechnungen mit dem (25 cm) Rechenschieber zieht man höchstens 4 Ziffern der vorgelegten Zahlen ohne Rücksicht auf die Stellung des Kommas in Betracht. Die Stellung des Kommas im Resultat erhält man am besten durch besondere Überlegung[1]).

In manchen Fällen, besonders bei einer größeren Anzahl aufeinanderfolgender Multiplikationen und Divisionen, kann es vorteilhaft sein, die Stellung des Kommas im Resultat durch eine mechanische Regel festzustellen oder zu kontrollieren. Zu diesem Zwecke denkt man sich die gegebenen Zahlen in der Form $a10^n+b10^{n-1}+c10^{n-2}+\cdots+g10^1+h10^0+i10^{-1}+k10^{-2}\cdots$ [2]). Den Exponenten n bezeichnet man als führende Ordnungsziffer. Bei einem Produkt ist die führende Ordnungsziffer gleich der Summe der führenden Ordnungsziffern der Faktoren.[3]) Reicht die Skala nicht zur Aneinandersetzung der Logarithmen aus, so ist ein Rückschlag nötig, indem man den Endstrich der Zunge statt ihres Anfangsstriches benutzen muß, was einer Division mit 10 gleichkommt. Man muß daher das Resultat mit 10 multiplizieren oder für jeden Rückschlag die Ordnungsziffer um 1 erhöhen.[4]) Bei der Division ist die führende Ordnungsziffer des Quotienten

---

Logarithmen den vom Anfangspunkt des letzteren gezählten Zahlen zugehörig. Am rechten Ausschnitt der Unterseite befinden sich zwei Indizes.

1) $0{,}000383 \times 0{,}00282$. Der Rechenschieber gibt $383 \times 282 = 108$, wenn das Komma nicht beachtet wird. Es ist nun in Einheiten der 3. Dezimalstelle $0{,}4 \times 3$ zu bilden, man erhält also ungefähr eine Einheit der 6. Dezimalstelle im Resultat: 0,00000108.

2) $1536{,}749 = 1\cdot10^3+5\cdot10^2+3\cdot10^1+6\cdot10^0+7\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+9\cdot10^{-3}$. Führende Ordnungsziffer 3.

3) $2\times3=6$, $0+0=0$. $516\times16=8256$, $2+1=3$.

4) $3\times4=(0{,}3\times4)\,10=12$, $(0+0)+1=1$.

gleich der Differenz der Ordnungsziffern von Dividend und Divisor, wenn man mit derselben Skala ausreicht.[1]) Ist dagegen ein Vorschlag erforderlich, der eine Ablesung am Endstrich statt am Anfangsstrich, also eine Multiplikation mit 10 bedeutet, so muß man die Ordnungsziffer um 1 erniedrigen.[2]) Diese Regeln werden gewöhnlich in den Gebrauchsanweisungen in anderer Form ausgesprochen, indem man die Stellenzahl (die um 1 höher ist als die Ordnungsziffer) einführt.

Multiplikation:

Ergebnis in derselben Teilung rechts: Stellensumme minus 1

Ergebnis in derselben Teilung links (bei A/B auch in der folgenden Teilung rechts): Stellensumme.

Division:

Ergebnis in derselben Teilung links: Stellendifferenz plus 1

Ergebnis in derselben Teilung rechts (oder bei A/B in der vorhergehenden links): Stellendifferenz.

Zur Erinnerung an diese Regeln findet sich auf manchen Stäben linker Hand $Q + 1$, rechter Hand $P - 1$ angeschrieben (Q Quotient, P Produkt).

5. Theorie. Die Striche x einer Skale von der Länge λ seien die Endstriche der vom Anfangsstrich x_0 abgetragenen Strecken $\lambda\varphi(x)$. Wenn noch der Endstrich der Skala mit x_n bezeichnet wird, so ist $\lambda\varphi(x_0) = 0$ und $\lambda\varphi(x_n) = \lambda$, also $\varphi(x_0) = 0$ und $\varphi(x_n) = 1$.[3]) Die Länge einer zweiten Skala werde entsprechend mit μ, Anfangs- und Endstrich mit y_0 und y_n bezeichnet und die Streckenlängen vom Anfangsstrich aus seien $\mu\chi(y)$; dann ist ebenso $\chi(y_0) = 0$ und $\chi(y_n) = 1$.

Bei beliebiger Verschiebung der Skalen und gleichlaufender Teilung seien (x, y) und (a, b) zwei Paare einander gegenüberliegender Striche. Ferner liege dem äußersten Strich y_0 der Strich A, dem äußersten Strich der andern Skala x_n der Strich B gegenüber. Wir lesen aus Figur 4 ab:

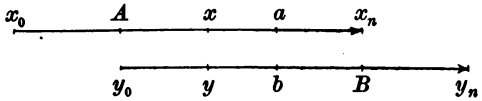


Fig. 4.

1) $6 : 3 = 2$, $0 - 0 = 0$. $8256 : 16 = 516$, $3 - 1 = 2$.

2) $12 : 4 = (1{,}2 : 4) \times 10 = 3$, $(1 - 0) - 1 = 0$.

3) Für $\varphi(x) = \log x$ ergibt sich $x_0 = 1$, $x_n = 10$; für $\varphi(x) = \log(10 \operatorname{tang} x)$ ist $x_0 = 5^0\,43',8$, $x_n = 45^0$.

$$\lambda[\varphi(a) - \varphi(x)] = \mu[\chi(b) - \chi(y)]$$

oder

$$\lambda\varphi(x) - \mu\chi(y) = \lambda\varphi(a) - \mu\chi(b).$$

Lassen wir das Paar (x, y) wandern, so daß es einmal mit $x = A,\ y = y_0$, das zweite Mal mit $x = x_n,\ y = B$ zusammenfällt, so erhalten wir

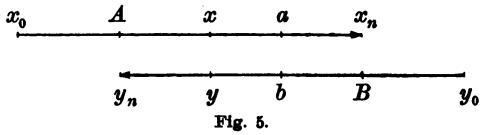


Fig. 5.

$$(1)\quad \lambda\varphi(A) = \lambda\varphi(a) - \mu\chi(b) = \lambda\varphi(x) - \mu\chi(y) = \lambda - \mu\chi(B).$$

Sind die Skalen gegenläufig (Figur 5), so ist

$$\lambda[\varphi(a) - \varphi(x)] = -\mu[\chi(b) - \chi(y)]$$

oder

$$\lambda\varphi(x) + \mu\chi(y) = \lambda\varphi(a) + \mu\chi(b)$$

und

$$(2)\quad \lambda\varphi(A) + \mu = \lambda\varphi(a) + \mu\chi(b) = \lambda\varphi(x) + \mu\chi(y) = \lambda + \mu\chi(B).$$

Die Ausdrücke $\lambda\varphi(x) \mp \mu\chi(y)$ haben also für eine bestimmte gegenseitige Lage der Skalen einen konstanten Wert, der durch die dem Anfangs- oder Endstrich der andern Skala gegenüberliegende Ablesung bestimmt ist. Faßt man (1) oder (2) als eine Gleichung zwischen zwei Unbekannten x und y auf, so kann man, wenn noch eine zweite Gleichung zwischen ihnen gegeben ist, (falls sie einfacher Natur ist) mit dem Rechenstab die Unbekannten finden. Ein solcher Fall ist der, daß die Summe oder Differenz $x \pm y = k$ gegeben ist. Man sucht dann dasjenige Zahlenpaar bei der durch die erste Gleichung (1 bzw. 2) bestimmten Skalenstellung auf, das die Summe oder Differenz k hat.[1])

1) Ein Beispiel bietet für den gewöhnlichen Rechenschieber die Auflösung einer quadratischen Gleichung, z. B. $7{,}15\,x^2 + 36{,}33\,x + 40{,}45 = 0$. Durch Division (mittels des Rechenschiebers) mit 7,15 erhält man $x^2 + 5{,}09\,x + 5{,}66 = 0$. Zwischen den beiden Wurzeln x_1 und x_2 bestehen also die Gleichungen: $x_1 \cdot x_2 = +\,5{,}66$ oder $\log x_1 + \log x_2 = \log(5{,}66)$, und $x_1 + x_2 = -\,5{,}09$. Nach (2) schiebt man die Zunge gegenläufig ein, stellt ihren Anfangsstrich über 5,66 der Stabteilung D und findet mit Hilfe des Läufers auf den nicht anliegenden Skalen C und D die Zahlen 1,63 und 3,46 gegenüberstehend, deren Summe 5,09 ist, also $x_1 = -\,1{,}63$, $x_2 = -\,3{,}46$. — Bei normal

Die Gleichungen (1) und (2) enthalten die Lösung der für den Rechenschieber vorkommenden Aufgaben, wenn sie den besonderen Fällen angepaßt werden. Insbesondere wird häufig $\mu = \lambda$ sein.[1])

6. Das Rechnen mit dem Stabe. Bei zwei identischen Skalen (A und B oder C und D) ist nach Figur 4 und nach 5. (1) bei einer bestimmten Stellung $\log A + \log b = \log a$ also $Ab = a$. Hieraus ist das Verfahren bei der Multiplikation ersichtlich, wo die Reihenfolge der Faktoren willkürlich ist. Man sieht zugleich, daß bei dieser Stellung alle Zahlen x das A-fache aller Zahlen y sind, der Rechenschieber vertritt daher eine Verwandlungstabelle, die man leicht durch eine andere (wie es z. B. für Kurstafeln wünschenswert ist) ersetzen kann, indem man A einen andern Wert gibt (durch Verschiebung der Zunge). Andrerseits ist $\log a - \log b = \log A$ oder $a/b = A$, woraus sich das Verfahren für die Division ergibt. Zugleich ist für jedes Wertepaar $x/y = A$; wenn die Fuge zwischen den beiden Teilungen als Bruchstrich betrachtet wird, so ist der Bruch, den jedes Zahlenpaar bildet, für eine bestimmte Zungenstellung derselbe.

Hiermit ist die wichtigste Anwendung des Stabes, nämlich die für die Proportionalrechnung, gegeben. Es ist $x : y = a : b$. Ist x gesucht, so stellt man a über b und liest x gegenüber y ab.

Bei identischen, aber gegenläufigen Skalen ist $x \cdot y = A$ nach 5. (2) und Figur 5. In dem Falle $x_0 = A$ (d. h. wenn sich x_0 und y_n gegenüberstehen, die Zunge ganz eingeschoben ist), sind x und y reziproke Werte (weil $x_0 = 1$), die mit dem Läufer eingestellt werden, weil die Skalen nicht aneinander liegen.

Die Quadratbildung erfolgt entweder durch Multiplikation

---

eingeschobener Zunge, bildet man nach (1) $\log(5{,}66) - \log x_2 = \log x_1$. Man hält in diesem Falle mit dem Läufer die Zahl 5,66 auf der Stabteilung fest und verschiebt die Zunge so lange, bis der ihrem Anfangsstrich entsprechende Wert ($x_1 = A$) der Stabteilung und die unter dem Läuferstrich auf der Zunge erscheinende Zahl ($y = x_2$) die Summe 5,09 ergeben. — Lösung der Keplerschen Gleichung. Astr. Nachr. **186**, 357.

1) Beim gewöhnlichen Rechenschieber ist für die Skalen A und B $\lambda = \mu$ und ebenso für C und D. Wenn man dagegen A oder B mit C oder D kombiniert, so ist λ (für A und B) $= 1$ gesetzt, $\mu = 2$ (für C und D). In diesem Falle ist (A oder B): $\varphi(x) = \log x$, (C oder D: $2\chi(y) = 2\log y = \log y^2$. Wenn die Anfangspunkte zusammenfallen, erhält man daher x (auf A oder B) $= y^2$ (auf C oder D) oder auch $y = \sqrt{x}$.

oder einfacher durch Übergang von der Skala D auf A oder von C auf B mit Hilfe des Läufers. Die Quadratwurzel wird umgekehrt durch Übertragung von A auf D oder von B auf C gefunden; man teilt die gegebene Zahl vom Komma in Gruppen von je zwei Stellen. Ist die Zahl ungeradstellig, so benutzt man die linke, ist sie geradstellig, die rechte Hälfte von A (oder B).

Den Kubus N^3 findet man, indem man den Zungenanfangsstrich über $N(D)$ (N auf Skala D) stellt und N^3 über $N(B)$ auf A abliest. Bei umgekehrt eingeschobener Zunge stellt man $N(A)$ und $N(C)$ einander gegenüber und findet N^3 auf A gegenüber 1 C (1 auf Skala C). Da nur ein Endstrich in Frage kommt, entsteht kein Zweifel. Bei der Kubikwurzelziehung teilt man die gegebene Zahl vom Komma aus in Gruppen von drei Ziffern. Je nachdem die erste Gruppe gültiger Ziffern ein-, zwei- oder dreistellig ist, benutzt man die linke Hälfte von A und den Anfangsstrich von B (für 1—10), die rechte Hälfte von A und den Anfangsstrich von B (für 10—100), oder die rechte Seite von A und den Endstrich von B (für Zahlen 100—1000).[1]) Bei verkehrt eingeschobener Zunge stellt man einen Endstrich der nach links fortschreitenden Skala C auf die Zahl N der anliegenden Skala A und zwar stellt man, je nachdem die erste dreistellige Gruppe außer etwa voranstehenden Nullen

1 Ziffer enthält:
N auf der linken Hälfte von A: den rechten Endstrich von C

2 Ziffern enthält:
N auf der rechten Hälfte von A: den rechten Endstrich von C

3 Ziffern enthält:
N auf der linken Hälfte von A: den linken Endstrich von C

1) Beispiele: $\sqrt[3]{8} = 2$. Läufer auf 8 A (links). Man verschiebt die Zunge, bis 1 C über derselben Zahl D steht, die auf B (links) unter dem Läuferstrich erscheint. (Also 1 C über 2 D, wenn 2 B unter 8 A). $\sqrt[3]{27} = 3$. Läufer auf 27 A (rechts). Man verschiebt die Zunge, bis auf der linken Hälfte von B dieselbe Zahl unter dem Läuferstrich steht, wie auf D unter dem Zungenanfang. (1 C über 3 D, 27 A über 3 B). $\sqrt[3]{216} = 6$. Läufer auf 216 A (rechts). Zungenverschiebung bis auf D unter dem Zungenende dieselbe Zahl steht, wie auf B (rechts) unter dem Läuferstrich (10 C über 6 D, 216 A_r über 6 B_r). Ist N die Zahl auf A und steht darunter y auf B, so steht auf A über dem Zungenendstrich $\frac{N}{y} = x^2$ und unter demselben Zungenende x auf D, mithin ist $N = x^3$ für $y = x$.

gegenüber N. Diejenige Zahl, die auf den anliegenden Skalen A und C sich selbst gegenübersteht, ist $\sqrt[3]{N}$.

Um eine beliebige Potenz oder Wurzel mit dem Rechenschieber zu bilden, muß man mit Benutzung der Formeln $\log(a^n) = n \log a$ und $\log(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \log a$ und $\log\log(a^n) = \log n + \log\log a$, $\log\log(\sqrt[n]{a}) = \log\log a - \log n$ vom Numerus zum Logarithmus übergehen, wofür die oben (S. 9) beschriebene L-Teilung dient. Wegen des Wendens des Instruments ist dies Verfahren unbequem. Eine Erleichterung gibt Martiny[1]) an, indem er die obere schräge mm-Teilung benutzt, deren Teilungsendstriche mit denen der Stabteilung zusammenfallen. Stellt man den Läufer auf den Anfangsstrich der Stabteilung ein, so reißt man auf der über der mm-Teilung gleitenden Seite des Läufers auf dem Metalle einen Strich ein (bzw. bringt man einen Zeiger an), der mit 0^{mm} zusammenfällt. Man verwendet dann bei Verschiebung des Läufers einfach die in Millimeter abgelesenen logarithmischen Längen (vgl. S. 5 Anm. 5) statt der L-Teilung.[2]) Die Skalenlänge von 250^{mm} entspricht der Zahl 10, für jede Potenz von 10 ist sie um das vielfache, welches der Exponent angibt, verlängert zu denken.[3])

Um die Rechnung mit gebrochenen Exponenten noch mehr zu vereinfachen, hat Lanchester[4]) einen besonderen Läufer konstruiert, den er *Radial Cursor* nennt. In dem Läuferrahmen ist senkrecht zu den Skalen ein Schieber MNO verstellbar, der am Ende einen Knopf O trägt, um den sich ein durchsichtiger Zellhornstreifen dreht. Eine auf diesem eingeritzte gerade Linie OJK geht durch die Kopfmitte. Insbesondere dient diese Vorrichtung für die Gleichung der adiabatischen Kurve $pv^\gamma = \text{konst.}$, so daß

---

1) Deutsche Mechaniker Zeitung, 1906, S. 143.

2) Beispiel: $\sqrt[\frac{1}{6}]{1{,}5} = (1{,}5)^{\frac{6}{43}} = x$ $15\,D \equiv 44^{mm}$ $44\,C$ über $43\,D$. Über $6\,D$ steht $614\,C$, also $44 \cdot \frac{6}{43} = 6{,}14$. $6{,}14^{mm} \equiv 1{,}058\,D$, $x = 1.058$.

3) Beispiel: $234 = 0{,}0067^x$, also $2{,}34 \cdot 10^2 = (6{,}7 \cdot 10^{-3})^x$
$2{,}34\,D \equiv 92{,}3^{mm}$, also $234 \equiv 92{,}3 + 2 \cdot 250 = +\,592{,}3^{mm}$
$6{,}7\,D \equiv 206{,}5$, also $0{,}0067 \equiv 206{,}5 - 3 \cdot 250 = -\,543{,}5^{mm}$
$-x = \frac{592{,}3}{543{,}5} = 1{,}09$.

4) Phil. Mag. (5) **41**, 52.

z. B. $\log p_2 - \log p_1 = \gamma(\log v_1 - \log v_2)$ ist. Schiebt man die Zunge verkehrt ein, so stehe auf Teilung A: K auf p_2, M auf p_1, auf Teilung B: J auf v_1, N auf v_2 ein, dann ist auf Teilung A die Strecke $MK = \log p_2 - \log p_1$, auf Teilung B die Strecke $NJ = \log v_1 - \log v_2$. Nun ist $\gamma = \frac{MK}{NJ} = \frac{MO}{NO} = 1 + \frac{MN}{NO}$ und $NO = \frac{MN}{\gamma - 1}$. Da MN die Zungenbreite ist, so kann man für verschiedene Werte γ die Länge NO oder auch NZ, wo Z die Mitte von MN ist, berechnen und eine Skala auf MO anbringen. Reicht die Skala für die gegebenen oder gesuchten Werte von γ nicht aus, so nimmt man statt dessen $\frac{1}{\gamma}$.[1])

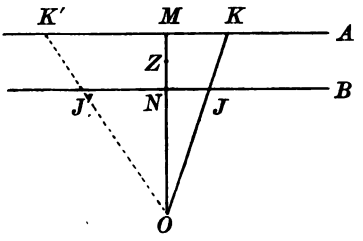


Fig. 6.

Boys[2]) fügte bei seinem Rechenschieber noch eine Skala der Logarithmen der Logarithmen hinzu.

Die Prüfung des Rechenschiebers wird sich der Hauptsache nach auf das Zusammenfallen der Anfangs- und Endstriche der Teilungen auf Ober- und Unterseite der Zunge mit denen der Stabteilungen erstrecken. Auch muß das Zusammenfallen der Striche der gleich geteilten Skalen und zugleich die zur Skalenrichtung senkrechte Lage des Läuferstrichs geprüft werden. Es kommen zuweilen auch Teilungsfehler an einer einzelnen Stelle vor, die am ehesten durch Proberechnungen entdeckt werden.

Die Genauigkeit des Rechnens ist von dem einzelnen Instrumente, insbesondere aber auch von dem Rechner abhängig. Im Mittel wird man für den Rechenschieber von 25 cm Länge

---

1) Ein anderes Beispiel ist $7^x = 3$. Da x offenbar ein Bruch ist, sucht man $\frac{1}{x} = \frac{\log 7}{\log 3}$. Man stellt den Läufer in die Mitte der Skala, hält den Zellhornarm so, daß die Exponentiallinie durch $7A$ geht und verschiebt den Knopf O in der Richtung OM so lange, bis der $3(A)$ auf B gegenüberliegende Punkt von der Exponentiallinie getroffen wird. Dann gibt die Skalenablesung bei Z 1,77, also ist $x = \frac{1}{1{,}77} = 0{,}565$.

2) Nature 72, 45, 1905 (s. w. unten Fürle).

0,2 % oder $\frac{1}{500}$ Fehler annehmen können, doch geben einzelne Rechner Genauigkeiten bis zu 0,05 % an.

7. Einige besondere Rechenschieber. Um eine größere Genauigkeit von etwa 0,03 % zu erzielen, hat man bei gleicher Länge des Instruments die Skalenlänge dadurch verdoppelt, daß die obere Stab- und Zungenteilung nur die Zahlen von 1 bis $\sqrt{10} = 3{,}162$, die unteren Teilungen die Fortsetzung von $\sqrt{10}$ bis 10 enthalten.[1]) Bei dem Präzisionsschieber von Nestler ist die *L*-Teilung auf die Vorderseite genommen und ebenfalls in zwei übereinander liegende Hälften geteilt, und dadurch auf der Rückseite der Zunge Platz gewonnen, um auch den *S*- und *T*-Teilungen eine doppelte Länge zu geben[2]); die Hinzufügung der gewöhnlichen Teilung von 25 cm Länge und zwar zweimal mit verschiedener Bezifferung (1—10 und 10—100) macht den Stab nur wenig breiter und die Bildung der Quadrate und Wurzeln sehr bequem. Diesen Vorzügen steht ein geringer Nachteil gegenüber, der darin liegt, daß das Ergebnis bald auf der oberen, bald auf der unteren Skala erhalten wird. Jedoch ergibt sich als sehr einfache Regel, daß bei Benutzung der noch durch ein Kreuz ausgezeichneten Zwischenendstriche $(\sqrt{10})$ auf der Zunge, das Produkt bei der Multiplikation nicht an der anliegenden, sondern auf der gegenüberliegenden Skala abgelesen wird, und umgekehrt bei der Division, daß bei Einstellungen mit Hilfe des Läufers, also Gegenüberstellung von Zahlen der oberen und unteren Skala, die Ablesung an dem einen Zwischenstrich $(\sqrt{10}$, nicht am Endstrich 1 oder 10) erfolgt. Diese Regel folgt daraus, daß die Zahlen der unteren Skala (der Fortsetzung der oberen) das $\sqrt{10}$-fache der oberen sind. Wenn also durch Einstellung mit dem Zwischenstrich das $\sqrt{10}$-fache an der anliegenden Skala erhalten würde, so muß man

1) Bei dem Stabe von Nestler sind oben einige überschüssige Teilstriche bis 3,3, unten von 3,0 ab hinzugefügt. Der von Frank (Stuttgart) konstruierte Stab unterscheidet sich von dem oben beschriebenen von Nestler durch das Fehlen der Quadratskala und die Anbringung der *L*-Skala auf der Rückseite der Zunge. Eine Annehmlichkeit dieser Stäbe liegt in der Verteilung der Ziffern, die eine Verwechslung nahezu unmöglich macht.

2) Während der Gebrauch dieser Teilungen beim gewöhnlichen Rechenschieber sehr zurücktritt, ist hier eine 4 stellige Rechnung damit ermöglicht.

noch mit $\sqrt{10}$ multiplizieren oder dividieren, d. h. auf die gegenüberliegende Skala übergehen: obere Skala $\varphi(x) = \log x$, untere Skala $\chi(x) = \log(x\sqrt{10})$.

Die französische Katasterverwaltung benutzt einen Stab nach diesem Prinzip, aber von doppelten Dimensionen (Skalenlänge 1 m, Stablänge 50 cm) zur Ausführung aller einschlägigen Rechnungen. Bei langen Schiebern läßt sich jedoch die Konstanz der Übereinstimmung identischer Skalen schwerer erreichen.

Rechenschieber zu besonderen Zwecken sind in großer Zahl konstruiert worden.[1]) Ein Teil bezweckt Vereinfachung und damit Verbilligung durch Weglassung von Teilungen[2]) oder Beschränkung der Striche.[3]) Nur erwähnt seien Schieber für kaufmännische (Hannyngton) und für militärische Zwecke (Schrittmaß), zur Rechnung nach den tachymetrischen Formeln (Skalen mit $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ und $\cos^2\alpha$), zur Berechnung barometrischer Höhen (Sresnewsky),[4]) für Ingenieure usw. Hervorgehoben seien zwei besonders vielseitige Stäbe, bei denen durch eine praktische Anordnung der Skalen die Übersicht ermöglicht wird.

Der Nautisch-Astronomische Rechenstab von R. Nelting[5]) gestattet das direkte Rechnen mit den Quadraten und Wurzeln der Zahlen und der trigonometrischen Funktionen und findet eine vielseitige Anwendung in der terrestrischen und astronomischen Navigation. Der 52 cm lange Stab trägt nicht allein auf der Ober- und Unterseite, sondern auch auf den langen Seitenflächen Teilungen, die durch einen den Stab rings umfassenden Läufer (Z) mit vier Glasfenstern und Einstellstrichen in Beziehung gesetzt werden. Er enthält ferner zwei Schieberzungen (Y, Y_1 Fig. 7, X Hauptteil, I Stellschrauben), die übereinander liegen, aber miteinander vertauscht werden können und deren jede auf beiden Seiten Teilungen trägt, die durch Umwenden der Zungen, sowohl

1) Favaro zählte 1879 bereits 44 Arten auf (Atti del R. Istituto Veneto di Scienze. Serie 5. T. 5, 495. Venezia 1878/79).

2) S- und T-Teilungen (Sickler).

3) Weglassung der letzten Unterabteilungen (Dennert u. Pape).

4) Hierzu kann auch der gewöhnliche Rechenschieber dienen, vgl. Zeitschr. f. Verm. **20**, 279. 1891.

5) Hamburg 1909 im Selbstverlage ist unter obigem Titel eine eingehende und mit zahlreichen Beispielen erläuterte Broschüre erschienen, auf die hier verwiesen sei. (Sie enthält aber viele Druckfehler!)

mit der Ober-, wie mit der Unterseite des Stabes zusammengestellt werden können. Um einen Überblick zu erhalten, möge eine Zusammenstellung der Teilungen folgen[1]):

A) Obere Fläche.

1) log sin: $0^h 0^m\ 1^s{,}4$ bis $0^h 2^m 17^s$ } in Zeit
2) log sin: $0^h 2^m 18^s$ „ $6^h 0^m 0^s$ }
3) log sin: $0°0'\ 21''$ „ $0°34'22''$ } in Bogen
4) log sin: $0°34'23''$ „ $90°0'0''$ }

(Raum für die Zunge.)

5) log tang: $5°42'\ 45''$ bis $45°0'0''$ } in Bogen
6) log tang: $0°34'\ 22''$ „ $5°42'30''$ }
7) log tang: $0^h 22^m 51^s$ „ $3^h 0^m 0^s$ } in Zeit
8) log tang: $0^h 2^m\ 18^s$ „ $0^h 22^m 50^s$ }

doppelter Maßstab von 1) bis 4)

B) Vordere Seitenfläche.

9) log sin: $5°44'\ 30''$ bis $90°0'0''$ } in Bogen
10) log sin: $0°34'\ 23''$ „ $5°44'15''$ }
11) log sin: $0^h 22^m 58^s$ „ $6^h 0^m 0^s$ } in Zeit
12) log sin: $0^h 2^m\ 18^s$ „ $0^h 22^m 57^s$ }

---

1) Als Beispiel diene die Berechnung der Zenitdistanz z eines Gestirns aus Polhöhe φ, Deklination δ und Stundenwinkel t. An Stelle von $\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$ setzt man (mit $\varphi = 90° - p$, $\delta = 90° - b$) $\sin^2\frac{1}{2} z = \sin^2\frac{1}{2}(b-p) + \sin p \sin b \sin^2\frac{1}{2} t =$

$n^2 + m^2 = m^2\left(1 + \frac{n^2}{m^2}\right)$ oder mit $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{\sin b \sin p \sin^2\frac{1}{2} t}}{\sin\frac{1}{2}(b-p)} = \operatorname{tg} x$

erhält man $\sin\frac{1}{2} z = \frac{m}{\sin x}$. Man stellt mit dem Läufer $\frac{1}{2} t$ auf Teilung 11 oder 12 ein, addiert $\log\sin b$ und $\log\sin p$ nacheinander mit Teilung 21 oder 22 der Zunge I und liest m unter dem Läuferstrich auf Teilung 14 ab. Man stellt auf Teilung 23 oder 24 bzw. bei kleinen Winkeln auf Teilung 17 oder 18 der Zunge $\frac{1}{2}(b-p)$ unter den Läuferstrich und erhält x am Anfangsstrich der Zunge auf Teilung 5 oder 6 des Stabes. Man stellt x auf Teilung 23 oder 24 unter den Läuferstrich und erhält $\frac{z}{2}$ auf Teilung 9 oder 10 des Stabes am Anfangsstrich bzw. Endstrich der Zunge.

C) Untere Fläche.

Häufig vorkommende Zahlenwerte.

13) log: Zahlen 1—10 zweimal nacheinander.

(Raum für die Zunge.)

14) log: Zahlen 1—10 (doppelter Maßstab von 13).
Häufig vorkommende Zahlenwerte.

D) Hintere Seitenfläche.

15) Mantissenteilung 0,0 bis 1,0000.
16) Dieselbe im doppelten Maßstabe.

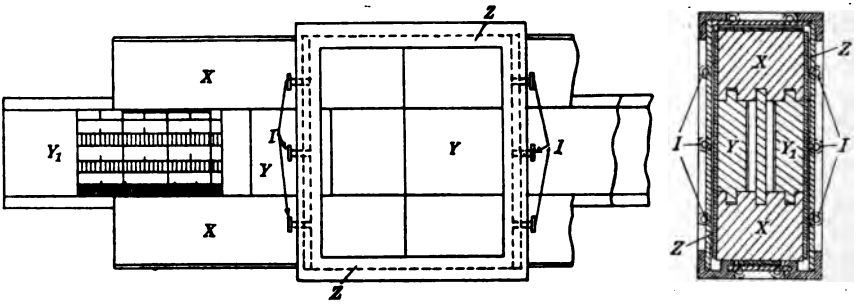


Fig. 7.

Zunge I.

Innere Seite:		Äußere Seite:	
17) log sin u. tang: 0°0′21″ bis 0° 3′26″		21) Teilung	4
18) log sin u. tang: 0°3′27″ bis 0°34′22″		22) „	3
19) Teilung 6	doppelter Maßstab	23) „	10
20) „ 5		24) „	9

Zunge II.

Innere Seite:		Äußere Seite:	
25) Teilung 4			
26) Teilung 4 in Kompaßstrichen		28) Teilung	13
		29) „	14 doppelter Maßstab
27) Teilung 5	doppelter Maßstab		

Der Rechenschieber von Fürle enthält elf Skalen, welche infolge der getroffenen Anordnung auf einem Instrument von denselben Dimensionen, wie der gewöhnliche Rechenschieber hat, Platz finden. Sie sind mit den beigesetzten Buchstaben bezeichnet, während λ die Längeneinheit bedeutet.

Stabteilungen.		Zungenteilungen.	
K	$\frac{\lambda}{3}\log x$ von $x=1$ bis 1000	N'	$=N$
Q	$\frac{\lambda}{2}\log x$ „ $x=1$ „ 100	Q'	$=Q$
N	$\lambda\log x$ „ $x=1$ „ 10	Z	$\frac{\lambda}{3}[\log\log y-\log\log\alpha]$
	(Raum für die Zunge.)		$=\vartheta+\frac{\lambda}{3}\log\log y$
L	$\frac{\lambda}{100}x$		(α Anfangszahl)
W	$\frac{\lambda}{100}x^2$	W'	$=W$
C	$\frac{\lambda}{1000}y^3$	L'	$=L$

Von den zahlreichen durch Kombination je einer Skala des Stabes und der Zunge lösbaren Aufgaben seien einige hier angeführt.

Das Skalenpaar KZ dient für die Zinseszinsrechnung: $C=\left(1+\frac{p}{100}\right)^x$. Sind $k_0 z_0$ und kz je zwei untereinanderstehende Zahlen, so ist $\log k_0-\log k=\log\log z-\log\log z_0$ also $z^k=z_0^{k_0}$ für eine Skalenstellung konstant.

Das Skalenpaar CL' liefert die reellen Wurzeln einer kubischen Gleichung. Sind x, y^3 und a, b^3 untereinanderstehende Werte, so ist $10x\mp 10a=y^3\mp b^3$ für $\overset{\text{gleich}}{\text{entgegen}}$ laufende Skalen. Man bringt die reduzierte kubische Gleichung $z^3\pm pz=\pm q$ durch die Substitution $z=x\sqrt{\frac{p}{10}}$ auf die Form $x^3\pm 10x=10a\pm b^3$, die $x=y$ entspricht.

Biquadratische Gleichungen löst das Skalenpaar $N'K$. Für übereinanderstehende Zahlen x, y und a, b ist $x^3y=a^3b$, also für $x=y$, $y^4=a^3b$.

Das Skalenpaar KQ', also die Funktionen $\varphi(x)=\frac{\lambda}{2}\log x$, $\chi(y)=\frac{\lambda}{3}\log y$ liefern bei umgekehrter Zunge $x^3y^2=a^3b^2$, also für $x=y$, $x^5=a^3b^2$. Man verschiebt die Zunge, bis dem Werte a von Q' dieselbe Zahl auf K gegenübersteht, wie auf Q' dem Wert b von K.

Die trinomische Gleichung $px^m\pm qx^n=r$ bringt man durch die Substitution $x=\sqrt[m]{y}\sqrt[n-m]{\frac{p}{q}}$ auf die Form $y^{\frac{n}{m}}\pm y=r\left(\frac{q^m}{p^n}\right)^{\frac{1}{n-m}}$.

Zur Berechnung dienen K und Z mit den Funktionen $\varphi(x) = \frac{\lambda}{3}\log x$, $\chi(y) = \vartheta + \frac{\lambda}{3}\log\log y$. Man erhält $y_1^{a_2} = y_2^{a_1}$ und unter Hinzufügung der Bedingung $y_2 - y_1 = d$, $y_1 + d = y_1^{\frac{a_2}{a_1}}$ oder $y_1^{\frac{a_2}{a_1}} - y_1 = d$.

8. Instrumente von anderer Form. Den Rechenschiebern werden von manchen Rechnern die Rechentafeln vorgezogen, weil die oft ruckweise erfolgende Bewegung der Zunge hier wegfällt. Sie bestehen aus Skalen, die in Stücke zerschnitten und parallel zu einander in einer Ebene angeordnet sind. Eine darauf zu legende durchsichtige Scheibe mit ebensolcher Anordnung vertritt die Zunge des Rechenschiebers. Da wir sie nicht zu den eigentlichen Instrumenten rechnen können, erwähnen wir hier nur die Tafeln von Billeter[1]), Klott, Everett, Hannyngton, Scherer[2]), Proell u. a.

Werden die logarithmischen Skalen auf dem Mantel eines Zylinders angeordnet, so entstehen die sog. Rechenwalzen, wie sie Mannheim, E. Thacher[3]) und Billeter konstruiert haben. Hierher gehört auch das Instrument von Fuller[4]), dessen Teilung in einer Schraubenlinie auf einem Zylindermantel aufgetragen ist und eine Länge von 12,7 m hat. Die Ablesung ist z. T. fünfstellig und die Genauigkeit etwa $^1/_{10000}$. Der Zylinder läßt sich sowohl drehen als in der Richtung der Achse verschieben; die Achse wird an einem Griff gehalten, an dem ein fester Index befestigt ist. Außerdem sind zwei bewegliche Indizes vorhanden, deren Entfernung dem Abstande des Anfangs- und Endpunktes der Skala gleich ist. Bei der Multiplikation bringt man den festen Index auf einen

1) Bei seiner kleinen Tafel wird der Fehler zu $\frac{1}{2500}$, bei der großen zu $\frac{1}{6000}$ bis $\frac{1}{10\,000}$ angegeben.

2) Diese Tafel, die bei der Generalkommission in Kassel in Gebrauch ist, gibt vier Stellen.

3) Cylindrical Slide Rule, Abbildung bei Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, Bd. II, 135, 1897, s. a. Zeitschr. f. Instrk. 24, 213, 1904.

4) Eine ähnliche Rechenwalze, Coordinate spirale slide rule von Bernard, durch Stanley & Co. in London ausgeführt, befand sich auf der Weltausstellung zu Brüssel 1910 und zeichnet sich durch Billigkeit aus. (Österreich. Zeitschr. f. Vermessungsw. 9, 47 abgebildet.)

Endstrich, stellt einen beweglichen Index auf den Multiplikandus, bewegt dann den Zylinder, bis der Multiplikator den festen Index trifft, und liest das Produkt am beweglichen Index ab. Bei der Division stellt man den festen Index auf den Divisor, und den beweglichen auf den Dividendus, bewegt darauf den Zylinder, bis der feste Index mit dem Anfangspunkt der Skala zusammenfällt und erhält am beweglichen Index den Quotienten.

Die Rechenscheiben enthalten die logarithmischen Skalen in Kreisform und im allgemeinen in sich zurücklaufend. Anfänglich war nur eine Skala vorhanden und an Stelle des bei einer geradlinigen Skala notwendigen Zirkels (s. S. 3) traten zwei Zeiger. Später kombinierte man zwei oder mehrere gegeneinander verschiebbare Skalen. Boucher stellte seinen cercle à calcul in Form einer Taschenuhr her und stattete ihn mit vier konzentrischen Kreisen aus, so daß die Gesamtlänge der auf sie verteilten Skala 38 cm betrug. Ein fester und ein beweglicher Zeiger diente zur Einstellung. Der Rechenknecht von G. Hermann und ähnlich Sextons Omnimeter sind ebenfalls mit zwei Nadeln versehen. Es sind bei ersterem zehn konzentrische Skalen vorhanden, welche verschiedene Funktionen enthalten.[1]) Ähnlich ist auch die Rechenscheibe von Ed. Sonne von 14 cm Durchmesser mit drehbarem Zeiger. Erwähnt seien noch die Rechenscheiben von Clouth, Hart (Proportior mit Zeiger und Mikroskop), F. A. Meyer (Taschenschnellrechner mit einfachem Kennzifferzählwerk), A. Steinhauser (Spiralen statt Kreise), Puller, Roether, Wichmann (Haldens Calculex).[2])

Bei den Rechenrädern ist die Teilung auf der Stirnfläche der Scheibe angebracht und zwar sind zwei oder mehrere Scheiben senkrecht nebeneinander gestellt, wie bei Beyerlen's drehbarem Rechenschieber, bei dem ein Stück Gelatinepapier mit einer zur Achse parallelen roten Linie an einem festen Träger als Index oder Läufer angebracht ist. Ähnlich ist Webers Rechenkreis.

1) 1) α 2) α^2 3) α^3 4) $2\pi\alpha$ 5) $\frac{\pi}{4}\alpha^2$ 6) $\log\alpha$ 7) $\arcsin\alpha$ 8) $\arcsin\frac{\alpha}{10}$ 9) $\operatorname{arctg} 10\alpha$ 10) $\operatorname{arctg}\alpha$.

2) Literatur bei Lüdemann, Zeitschr. f. Verm. **36**, 241, 1907, Mehmke, Numerisches Rechnen, Leipzig, 1902. Ein andres Instrument für logarithmische Rechnung kommt im folgenden unter den Differentialapparaten zur Besprechung.

II. Abschnitt.

Rechenmaschinen.

9. Vorzüge des Rechnens mit Rechenmaschinen. Die im vorigen Abschnitt besprochenen Instrumente dienen für genäherte Rechnungen, reichen aber für viele Fälle aus, weil die zu Grunde gelegten Werte durch Beobachtung oder Messung ebenfalls nur mit genäherter Genauigkeit bekannt sind, also eine strenge Rechnung nur in formaler Beziehung ein genaues Resultat liefert. Die Ergebnisse, welche die Rechenmaschinen liefern, sind dagegen vollkommen genau. Allerdings ist diese Genauigkeit durch die Anzahl der Stellen, welche die Maschine liefert, ebenfalls begrenzt.[1]) Die Vorteile des Maschinenrechnens vor dem Gebrauche des Rechenschiebers usw. sind wesentlich folgende: 1. beim Rechenschieber hängt die Genauigkeit von dem Zustande des Instruments ab, insofern es immer kleinen Veränderungen durch Temperatur, Feuchtigkeit usw. ausgesetzt ist, und vom Beobachter, insbesondere von der Güte seiner Augen, während bei der Maschine, sofern sie den mechanischen Anforderungen genügt, das Ergebnis unabhängig von beiden erscheint; 2. bei den Skalenablesungen können Fehler vorkommen, bei der Maschine steht das Resultat fertig da und wird bei verschiedenen neueren Ausführungen sogleich gedruckt; 3. bei den Rechenmaschinen können Kontrollen durch die Maschine ausgeführt werden. Dem gegenüber stehen als Nachteile die größeren Anschaffungskosten und in den meisten Fällen der Praxis die überflüssige Kraftanstrengung infolge Mitführung einer mehr oder weniger großen Anzahl unnötiger Ziffern.

10. Zählwerk. Jede Rechenmaschine enthält ein Zählwerk, das meistens aus einer Reihe horizontal[2]) liegender, kreisförmiger Scheiben besteht, auf deren jeder die Ziffern 0, 1, 2, ... 9 in gleichen Abständen am Rande aufgetragen sind. Jede Scheibe ist um ihre senkrechte Achse drehbar und mit einer feststehenden Platte bedeckt, die ein Schauloch oder Fenster enthält, durch das immer nur eine der Ziffern sichtbar ist. Folgen die Ziffern ein-

1) Nur bei einer Maschine (Gauß) ist die Stellenzahl des Multiplikators oder Quotienten unbegrenzt, aber dies ist nur bei der Division von Vorteil.

2) Bei manchen Maschinen (s. u. Odhner) stehen die Scheiben vertikal.

ander im entgegengesetzten Sinne wie diejenigen des Zifferblattes einer Uhr, so werden bei Drehung der Scheibe im Sinne des Uhrzeigers nacheinander die Zahlen, in der richtigen Reihenfolge zunehmend, in das Schauloch gelangen, während bei entgegengesetzter Drehung die in dem Schauloche erscheinenden Ziffern in abnehmender Reihe auftreten. Durch Drehung einer solchen Scheibe um eine gegebene Zahl (3) von Zifferintervallen kann man daher zu einer im Schauloch gerade sichtbaren Zahl (5) jene Zahl (3) addieren oder von ihr subtrahieren, und man erblickt im Schauloch nach der Drehung die Summe (8), falls diese nicht 9 überschreitet, oder bei entgegengesetzter Drehung die Differenz (2), sofern sie 0 oder größer als 0 ist.

11. Zehnerübertragung. Wenn man aber bei einer solchen Reihe von Scheiben, deren Schaulöcher nebeneinander liegen, z. B. in dem am weitesten rechts gelegenen Fenster die Zahl 5 erblickt und durch Drehung dieser Scheibe im Uhrzeigersinne um 9 Stellen die Ziffer 4 in diesem Schauloch erhält, so muß man, um das richtige Resultat 14 zu erhalten, die links daneben stehende Scheibe, wenn in ihrem Schauloch 0 stand, um eine Stelle drehen, so daß 1 darin erscheint. Um dies nicht mit der Hand ausführen zu müssen, ist eine Übertragungsvorrichtung nötig, die darin bestehen kann, daß die Achse jeder Scheibe ein Zahnrad mit zehn Zähnen trägt, die den zehn Ziffern der Scheibe entsprechen und daß der Zahn, welcher der Null entspricht, genügend lang ist, um in das Nachbarrad einzugreifen und dies dadurch um einen Zahn weiter zu drehen. Diese Vorrichtung würde für das Rad am rechten Ende, dessen Scheibe die Einer anzeigt, genügen, da es ja nur das Rad der Zehnerscheibe neben sich hat. Bei den andern Scheiben würde aber ebenso ein Eingriff des verlängerten Zahnes in das rechts gelegene Zahnrad erfolgen, während doch nur eine Übertragung nach links beabsichtigt ist. Es gibt daher, je nach der Ausführung der Maschine, verschiedene Arten[1]) dieser Zehnerübertragung und von der Zuverlässigkeit des Übertragungsmechanismus hängt wesentlich die Güte der Maschine ab.

1) Wir besprechen sie an anderer Stelle. Das von Pascal erfundene Prinzip, das wir hier angegeben haben, ist bei den einfachen Additionsmaschinen (Goldmans Contostyle, Bollée Compteur) anwendbar, bei denen z. B. auf parallel geführten Metallstreifen, die über Rollen in sich zurücklaufend geführt sind, die Zahlen stehen und nach links eine Übertragung angebracht werden kann.

Die Drehung der Scheiben erfolgte bei der ersten Maschine, die Pascal 1642 konstruierte, mit der Hand, bei andern Maschinen durch Niederdrücken von Tasten, indem entweder jeder Ziffer von 1 bis 9 eine Taste entsprach, oder aber für die Einer, Zehner, Hunderter usw. je neun Tasten in parallelen Reihen angeordnet wurden.[1])

12. Schaltwerk. Um mit diesen Maschinen zu multiplizieren (dividieren), ist eine wiederholte Addition (Subtraktion) erforderlich. Hierbei ist es zu mühsam, nacheinander jede einzelne Scheibe um die geforderte Stellenzahl zu drehen; man benutzt daher ein Schaltwerk. Die älteste, aber heute noch gebräuchliche Ausführung eines solchen verdanken wir Leibniz (1673), der die Staffelwalze und damit die erste zur Multiplikation brauchbare Maschine erfand.[2]) Ein solches Schaltwerk dient dazu, gleichzeitig sämtliche Scheiben und zwar jede um die geforderte Stellenzahl weiter zu drehen.

Wenn wir uns eine Anzahl von zehn völlig gleichen Zahnrädern zentrisch so aufeinander gelegt denken, daß ihre Zähne und Zahnlücken sich decken, so bilden sie zusammen einen Zylinder mit Längsleisten (Fig. 9). Wir stellen uns nun weiter vor, daß das erste Rad vollständig ist, bei jedem folgenden aber, der Reihe nach, ein Zahn mehr fortgeschnitten wird, so daß das vorletzte Zahnrad nur einen, das letzte keinen Zahn besitzt. Dann haben auf dem Zylinder, den die Zahnräder bilden, die Leisten verschiedene Längen, die der Reihe nach über 9, 8, 7, ... 1 Zahnräder reichen. Ein solcher, in Wirklichkeit aus einem Stück hergestellter Zylinder, wird nach Reuleaux Staffelwalze genannt.

Wird nun auf einer der Walzenachse parallelen vierkantigen[3]) Achse (Fig. 8) ein Zahnrad Z mit zehn gleichmäßig verteilten Zähnen verschoben, so wird es, wenn es dem ersten der Räder, aus denen wir uns die Staffelwalze zusammengesetzt dachten, gegenübersteht und zum Eingriff kommt, bei einer vollen Umdrehung der Walzenachse um neun Zähne weitergedreht. Bei der weiteren Verschie-

1) Additionsmaschine von Max Mayer, konstruiert von A. Barthelmes, 1887. Auch verband man damit eine Vorrichtung zum Drucken der Summanden und der Summen: Burrough.

2) Die nach seinen Angaben gebaute Maschine konnte allerdings nicht in Gang gebracht werden, vgl. Zeitschr. f. Verm., 26, 292, 1897.

3) Längs einer solchen Achse kann ein lose aufsitzendes Rad mit viereckigem Ausschnitt verschoben werden und dreht sich doch bei einer Drehung der Achse mit.

bung erleidet Z Eingriffe von acht Staffelleisten bei einer Umdrehung der Walzenachse usf. Am andern Ende angelangt, wird Z nur um einen Zahn weiter gedreht und nach der letzten Verschiebung steht es dem glatten Zylinder gegenüber und wird gar nicht gedreht.

In dem Gehäuse, wo diese Einrichtung angebracht ist, sei nun im oberen Deckel ein Schlitz parallel den Achsen der Staffelwalze und des verschiebbaren Zahnrades Z angebracht und in ihm ein Stab mit einem Knopf, der den Stab am Hineinfallen hindert, senkrecht aufgehängt (Fig. 8). Mit Hilfe dieses Stabes wird Z auf seiner Achse verschoben. Am Rande des Schlitzes sind den verschiedenen Stellungen von Z entsprechende Ziffern 9, 8, ... 1, 0 angeschrieben und der Knopf ist mit einem Zeiger versehen. Stellen wir den Zeiger auf eine bestimmte Ziffer ein, so wird bei einer durch eine Kurbel bewirkten Umdrehung der Staffelwalze das Zahnrad um dieselbe Anzahl von Stellen gedreht, wie die Ziffer angibt. Durch ein Kegelgetriebe[1]) überträgt das Rad Z, bzw. seine sich mit ihm drehende Achse c (Fig. 8) die Drehung auf eine unter dem Deckel des Gehäuses, in dem sich auch der Schlitz befindet, horizontal gelagerte Ziffernscheibe. Man erblickt dann durch das im Deckel freigelassene Schauloch die betreffende Ziffer.

Nun ist, wie schon erwähnt, nicht ein Schlitz, sondern eine Anzahl paralleler Schlitze vorhanden und unterhalb eines jeden befindet sich eine ebensolche Einrichtung, wie unter dem ersten. Ferner ist durch eine Kurbel b (Fig. 8) mit einer langen, quer zu den vorgenannten Achsen liegenden Achse a (Fig. 8) die Möglichkeit gegeben, durch eine einzige Kurbeldrehung mittels Kegelräderübertragung sämtliche Staffelachsen gleichzeitig einmal herumzudrehen.[2])

1) Zahnräder, bei denen die Zähne auf dem kegelförmig abgeschrägten Radkranze liegen, können ineinander eingreifen, wenn ihre Ebenen schräg oder sogar senkrecht zueinander liegen (z. B. die beiden Räder in Fig. 8 vorn links), während gewöhnliche Zahnräder nur zum Eingriff gelangen können, wenn sie in derselben Ebene liegen.

2) Würde z. B. in den vier am weitesten rechts gelegenen Schlitzen die Zahlen 9876 eingestellt, während die übrigen Knöpfe auf 0 stehen, so wird eine Multiplikation von 9876 mit 3 durch dreimalige Kurbeldrehung erreicht. Bei der ersten Umdrehung erscheint die Zahl 9876 selbst in den vier rechts liegenden Schaulöchern. Bei der zweiten Umdrehung erhält man 19752, bei der dritten 29628, wenn Zehnerübertragung stattfindet. Soll dagegen zu 9876 eine andere

Um auch subtrahieren und damit dividieren zu können, ist ein Umschalter vorgesehen. Wir haben ein Kegelrad an der Achse des Rades Z erwähnt, welches die Drehung dieser Achse auf die senkrechte Achse der Zählscheibe überträgt. Nun sind zwei solche Kegelräder auf der Achse von Z angebracht, die von entgegengesetzten Seiten in das Zählscheibenrad eingreifen und es demgemäß in verschiedener Richtung drehen können. Durch einen Stellhebel d und e (Fig. 8) kann nun gleichzeitig für sämtliche Achsen aller Räder Z die Verschiebung der Kegelräderpaare bewerkstelligt werden, so daß die Zahlen auf allen Zählscheiben entweder gleichzeitig zu- oder abnehmen, wenn man die Kurbel dreht.

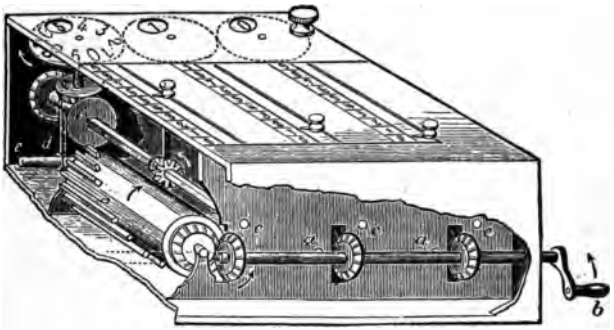


Fig. 8.

Es muß noch erwähnt werden, daß die Verteilung der zwar unter sich gleich weit abstehenden Zahnleisten der Staffelwalzen keine gleichförmige über den Umfang der Walzen ist. Vielmehr nehmen die Leisten nur einen Teil des Zylinderumfanges ein, so z. B. bei Burkhardt $^{9}/_{25}$, während $^{16}/_{25}$ frei bleiben, bei Thomas $^{9}/_{22}$ gegen $^{13}/_{22}$. Dies hängt mit der Zehnerübertragung zusammen, deren Einrichtung wir jetzt leicht erörtern können. Die Achsen der Zahnräder Z tragen nämlich in ihrer Verlängerung noch andere Räder Y[1]), die nicht mit den Zahnleisten der Walzen in Berührung kommen. Jede Walzenachse trägt auch noch in ihrer Verlängerung einen Zahn X (Fig. 9), der aber für gewöhnlich nicht in das zugehörige Rad Y eingreift. Wenn aber eine der Zählscheiben S_i von 9 auf 0 übergeht, so verschiebt ein unten an ihr

Zahl 11325 addiert werden, so dreht man zunächst einmal und erhält 9876 in den Schaulöchern, dann stellt man die Knöpfe auf 11325 in den fünf rechts liegenden Schlitzen und erhält bei nochmaliger Kurbelung 21201 in den Schaulöchern.

1) In Fig. 8 nicht sichtbar.

befindlicher Daumenansatz mittels einer Hebelübersetzung den Zahn X_{i+1} der links nächstfolgenden Walze in die Ebene des zugehörigen Rades Y_{i+1}, so daß dieses um eine Stelle weiter gedreht wird und die Zahl auf der zugehörigen Zählscheibe S_{i+1} sich um 1 ändert. Dieser Eingriff des Zahnes X_{i+1} in das Rad Y_{i+1} darf aber nicht gleichzeitig mit dem Eingriff einer Zahnleiste der Walze W_{i+1} in das Rad Z_{i+1} erfolgen. Denn da Y_{i+1} und Z_{i+1} auf derselben Achse sitzen, so würde die gleichzeitige Wirkung den einen von beiden Eingriffen überflüssig machen oder bei nicht vollständiger Gleichzeitigkeit eine Störung verursachen. Deshalb darf der Eingriff des Zahnes X_{i+1} erst erfolgen, wenn bereits alle Zahnleisten der Walze W_{i+1} ihre Wirkung auf das Zahnrad Z_{i+1} ausgeübt haben. Hieraus ist erklärlich, weshalb die Zahnleisten noch einen Teil des Walzenzylinders frei lassen müssen, aber dieser freie Teil brauchte nicht so bedeutend zu sein, wenn nur die eine Walze W_{i+1} in Betracht käme. Der Zahn X_{i+1} darf aber auch erst wirken, wenn sämtliche Zahnleisten der (rechts) vorangehenden Walze W_i einschließlich des an ihr befindlichen Zahnes X_i ihre Rolle fertig gespielt haben. Denn es kann ja gerade der Zahn X_i sein, welcher die Scheibe S_i von 9 auf 0 bringt und demnach erst die Zehnerübertragung auf die Scheibe S_{i+1} nötig macht. Aus diesem Grunde darf die Stellung der Zahnleisten auf den verschiedenen Walzen nicht dieselbe sein; die Walzen, die ja an sich ganz gleich sind, müssen sozusagen, gegen einander verdreht sein. Es ist dies auch noch deshalb nötig, weil beim gleichzeitigen Eingreifen der Staffelwalzen eine große Kraft zum Drehen der Kurbel erforderlich wäre und außerdem starke Spannungen auftreten würden.

Fig. 9.

13. Einteilung der Rechenmaschinen. Diejenigen Maschinen, die zwar eine Zehnerübertragung, aber kein Schaltwerk besitzen, werden als Additionsmaschinen bezeichnet, wie Roths Additioneur, Webbs Adder und zahlreiche in kaufmännischen Betrieben verwendete Abarten. Bei ihnen finden sich häufig selbsttätige Vorrichtungen zum Drucken der addierten Zahlen und ihrer Summen auf einem weiterlaufenden Papierstreifen, wie bei Burroughs Registering Accountant. Tritt ein Schaltwerk hinzu, so erhält man eine erweiterte Additionsmaschine.

Um diese aber zum Multiplizieren auch mit mehrstelligen Multiplikatoren benutzen zu können, muß beim Übergang von einer Stelle des Multiplikators zur nächsten (von den Einern zu den Zehnern, Zehnern zu den Hunderten usf.) das Zählwerk gegen das Schaltwerk jedesmal um eine Stelle verlegt werden. Diese Verrückung findet entweder durch Umheben mit der Hand von einem Einsatz zum andern statt, wodurch bei der beschriebenen Einrichtung jede Staffelwalze mit dem nächstfolgenden Zahnrad der ihm entsprechenden Zählscheibe in Eingriff kommt, oder die Verschiebung findet auf Schienen statt und wird durch Anschläge begrenzt und durch Druck auf einen Knopf ausgelöst oder endlich sie erfolgt selbsttätig nach jeder Kurbeldrehung, wobei dann durch einen besonderen Ausschalter die Möglichkeit gegeben sein muß, sie außer Tätigkeit zu setzen (im Falle der Addition). Eigentliche Multiplikationsmaschinen sind mit einem Multiplikationskörper versehen, wie er zuerst von Bollée (1888) angewandt worden ist. Hierzu kommen als vierte Art noch die Differenzenmaschinen.

14. Thomas-Burkhardtsche Maschine. Die erste, wirklich brauchbare Maschine, die mit der Leibnizschen Ähnlichkeit hatte, war 1776 von dem Pfarrer Mathias Hahn in Echterdingen gebaut worden. Dasselbe Prinzip lag auch derjenigen des Ingenieurhauptmanns J. H. Müller in Gießen (1783) zugrunde, zur allgemeinen Verbreitung kam aber erst der Arithmometer des Pariser Versicherungsdirektors Thomas aus Colmar (1821), den dann Burkhardt in Glashütte (1878) weiter verbessert hat. Hieran schließen sich dann zahlreiche neuere Maschinen an, die unter den Namen Arithmometer, Archimedes, Peerleß, Saxonia, Tim, Unitas, Bunzel-Delton, Austria, Ideal usf. verbreitet sind. Die Beschreibungen, die im Voranstehenden gegeben sind, beziehen sich auf die Burkhardtsche Konstruktion, im folgenden sollen für die hauptsächlichsten Typen die wesentlichen Abweichungen und Ergänzungen folgen. Eine Anzahl teils gemeinsamer, teils besonderer Einrichtungen muß hierbei übergangen werden. Es sei nur erwähnt, daß an Stelle der Zehnerübertragung bei der letzten Stelle, wo sie aufhört, ein Glockensignal als Warnungszeichen eingeführt ist, daß ferner Löschvorrichtungen alle Zählscheiben gleichzeitig auf die Einstellung „Null" zurückführen, daß bei manchen Maschinen zwei Reihen von Zählscheiben vorhanden sind, von denen die eine das Zwischenresultat festhält, während eine neue Operation ausgeführt wird und dergl. mehr.

15. Divisionsmaschine Mercedes-Euklid. An diese Rechenmaschinen schließt sich in der Form die von Ch. Hamann (Friedenau bei Berlin) konstruierte und Mercedes-Euklid benannte an (Fig. 11). Bei ihr sind die Staffelwalzen durch 10 Zahnleisten Z ersetzt, welche in ihrer Längsrichtung verschiebbar quer unter den Einstellschlitzen angebracht sind. Ihre Verschiebung wird durch einen sogenannten Proportionalhebel bewirkt, mit dem sie durch Gelenke verbunden sind. Dieser Hebel H wird um einen seiner Endpunkte durch eine Pleuelstange P, die ihn in der Mitte anfaßt, bei einer Um-

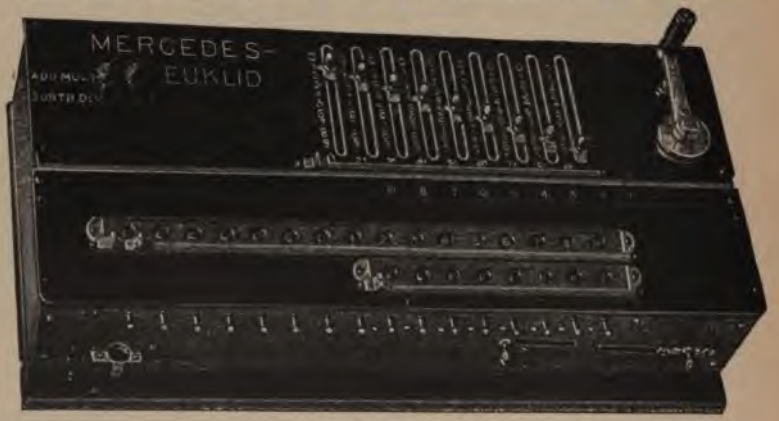


Fig. 10.

drehung der Kurbel K gedreht. Jeder Gelenkpunkt und damit jede Zahnleiste Z verschiebt sich dadurch um eine Strecke, die den an den Schlitzen angeschriebenen, darüber stehenden Zahlen proportional ist. Stellt man nun mit den Einstellknöpfen über die Zahnleisten Zahnräder, welche unter den Knöpfen angebracht sind, so greifen diese in die Zahnleisten ein und werden um so viel Stellen gedreht, als sich die betreffenden Zahnleisten verschieben, also um die Zahl, die den Einstellungen der Knöpfe gleich ist. Durch einen Umstellhebel kann aber der Proportionalhebel zur Drehung um seinen anderen Endpunkt eingestellt werden. Dann beschreiben die Gelenkpunkte und die Zahnstangen, die vorher 0, 1, 2, 3, ... 9 Einheiten bei einer Kurbelumdrehung zurücklegten, 9, 8, 7, ... 0 Einheiten, d. h. die Ergänzungen der an den Schlitzskalen angezeigten Zahlen zu 9. Diese Einstellung dient daher zur Subtraktion, die in der Tat durch Addition der

dekadischen Ergänzungen ausgeführt werden kann. Wenn noch die Einerstelle um eine Einheit erhöht und die höchste Stelle um eine Einheit erniedrigt wird[1]), was durch besondere Vorrichtungen der Maschine besorgt wird, so erhält man das richtige Resultat. Für die Multiplikation (Multiplikator) und Division (Quotient) ist es notwendig, daß auch die Kurbelumdrehungen gezählt werden und diese Zahlen in besonderen Schaulöchern (die den Stellen der Einer, Zehner usf. entsprechen) sichtbar werden, wie dies auch bei den anderen Maschinen der Fall ist. Nun ist aber bei dieser Maschine auch für das Umdrehungszählwerk die Zehnerübertragung vorhanden und eine Umschaltung von Addition auf Subtraktion vorgesehen. Hierdurch ist die Möglichkeit einer völlig automatischen

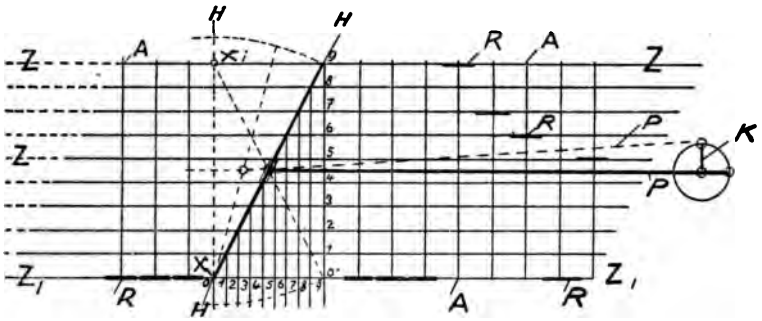


Fig. 11.

Division gegeben, wobei durch sehr bequeme Anordnung der beiden Umschalter für das Schaltwerk (Proportionalhebel) und die Kurbelumdrehungen die jedesmalige Einstellung beider durch einen Handgriff erledigt wird (Fig. 10 links oben). Auch wird bei jeder Umschaltung des Proportionalhebels, wenn nicht eine besondere Hebelvorrichtung dies verhindert[2]), das Zählwerk selbsttätig um eine Stelle nach links verrückt. Ferner tritt an die Stelle der bei der letzten Ziffer nicht mehr vorhandenen Zehnerübertragung nicht ein Glockenzeichen, sondern eine mit Federdruck bewirkte Sperrung der Kurbel.

1) Beispiel: 384923 — 97605 = 384923 + (99999 — 97605) — 100000 + 1 = 384923 + 2394 — 100000 + 1.

2) Bei der Addition und Subtraktion darf keine Verrückung des Schaltwerkes gegen das Zählwerk stattfinden, wie schon oben erwähnt wurde.

Die automatische Division, durch die sich diese Maschine auszeichnet, beruht auf folgendem Vorgang, bei dem wir uns auf 2 Stellen des Quotienten c und d beschränken: Es sei

$$\frac{a}{b} = c \cdot 10^n + \frac{r_c}{b}, \quad \frac{r_c}{b} = d \cdot 10^{n-1} + \frac{r_d}{b},$$

also

$$\frac{a}{b} = c\,10^n + d\,10^{n-1} + \frac{r_d}{b},$$

dann führt man zunächst $c+1$ Kurbeldrehungen (Kurbelzählwerk auf Addition) bei Stellung des Proportionalhebels auf Subtraktion aus und erhält

$$\frac{a}{b} = (c+1)\,10^n + \frac{r_c - b \cdot 10^n}{b}.$$

An einer Fortsetzung der Kurbeldrehung hindert die Sperrung der Kurbel, sobald $r_c - b \cdot 10^n$ negativ ist. Jetzt schaltet man den Hebel H auf Addition und das Kurbelzählwerk auf Subtraktion und erhält bis zur Sperrung der Kurbel

$$\frac{r_c - b \cdot 10^n}{b} = -(10-d)\,10^{n-1} + \frac{r_d}{b}.$$

Beide Operationen zusammen geben daher denselben Ausdruck für $\frac{a}{b}$ wie oben.[1])

1) Beispiel: $a = 225$, $b = 7$, $c = 3$, $d = 2$, $r_c = 15$, $r_d = 1$, $10^n = 10$, $10^{n-1} = 1$. ($a : b = 32$, Rest 1.) Wir nehmen eine 9stellige Maschine an und stellen mit den Wirteln an der Vorderfläche der Maschine bei äußerster Verschiebung des Wagens nach rechts in der Reihe der 16 Schaulöcher des Dividendus, von links beginnend, 225 ein. Als Divisor stellen wir 7 (da wir dies in diesem Beispiel übersehen, in dem zweiten der Schlitze) ein. Bei Stellung des Proportionalhebels (linker Knopf Fig. 10 oben links) auf Subtraktion wird die dekadische Ergänzung addiert, also bei jeder Kurbeldrehung ...930. Dies gibt, bei der ersten Kurbeldrehung zu 225 addiert, 155. Wir drehen die Kurbel weiter und erhalten der Reihe nach 085, 015, 945. Bei diesem Übergang müßten die Zahlen 9 nach links fortgesetzt werden (da die dekadische Ergänzung ebenfalls mit unendlich vielen Zahlen 9 nach links zu denken ist). Die letzte Stelle links überträgt sich aber nicht mehr, sondern löst statt dessen die Hemmung aus, so daß eine weitere Kurbeldrehung unmöglich ist. Das Resultat ist bis hierher $945 - 1000 = -55 = r_c - b \cdot 10^n$. Das Kurbelzählwerk (vordere Reihe mit 8 Schaulöchern für den Quotienten) zeigt 4 positive Drehungen in der ersten Stelle an.

Stellt man jetzt den Proportionalhebel auf Addition und gleich-

16. Odhners Arithmometer. Die nach dem System von dem schwedischen Ingenieur W. Th. Odhner in Petersburg (1878) konstruierten Maschinen (Odhner, Brunsviga 1892, Brunsvigula, Merkur, Arithmotyp-Trinks, Berolina, Triumphator, Monopol) haben an Stelle der Staffelwalzen Zahnräder E mit einziehbaren Zähnen.[1]) Bei der Einstellung der Stellhebel (die an Stelle der Knöpfe [s. S. 26] treten) in den auf einer zylinderförmig gewölbten Fläche angebrachten Schlitzen werden in den Zahnrädern E so viele Zähne vorge-

Fig. 12.
SS Schlitze, *ZZ* Produkt (Dividendus), *QQ* Multiplikator (Quotient), *LL* Löschvorrichtung, *K* Kurbel.

schoben, daß die am Schlitz eingestellte Zahl von Zähnen in Wirksamkeit tritt (Fig. 13). Das Zahnrad Z (s. S. 25) verschiebt sich hier nicht, sondern bleibt immer seinem besonderen Rade E gegenüber. Auf diese Weise wird auch weniger Raum beansprucht, da auch die Zählscheiben auf einer gemeinsamen horizontalen Welle neben-

zeitig das Kurbelzählwerk (rechter Knopf Fig. 10 oben links) auf Subtraktion, so wird gleichzeitig das Zählwerk um eine Stelle nach links verrückt, so daß 7 über der letzten Ziffer von 945 steht. Macht man jetzt $10 - d = 8$ Kurbeldrehungen, so erhält man 952, 959, 966, 973, 980, 987, 994, 001. Jetzt löst der Übergang von 9 auf 0 in der letzten Stelle links die Hemmung und hindert eine weitere Drehung. (Wenn wir nicht mit dem Reste $r_d = 1$ aufhören wollen, müssen wir wieder den linken Knopf auf Subtraktion, den rechten auf Addition stellen, und man kann beliebig weit fortfahren, wenn man am Ende angelangt, den letzten Rest wieder nach links in der Dividendenreihe überträgt.) Das Kurbelzählwerk zeigt in der zweiten Stelle 8 negative Umdrehungen an, oder da bei ihm auch Zehnerübertragung stattfindet, so liest man im ganzen $40 - 8 = 32$ ab.

1) Dieser Gedanke rührt auch von Leibniz her und war vielleicht bei seiner zweiten (verschollenen) Maschine verwirklicht. Vgl. Mehmke, Numerisches Rechnen S. 965.

einander angebracht werden konnten. Die Zahlen (*ZZ* Fig. 12) stehen auf ihren Stirnflächen dichter nebeneinander als bei anderen Maschinen mit horizontal liegenden Rädern. Ein Vorteil dieser Maschinen vor allen anderen ist die Bewegung der Kurbel in einer senkrechten Ebene, wobei der Arm weniger ermüdet, als bei horizontaler Drehung. Dieselbe Schaltwerkeinrichtung haben die Maschine von Otto Büttner und die Duplex-Rechenmaschine von Küttner, letztere auch mit Odhners Anordnung der Zählscheiben. Die anderen Einrichtungen sind z. T. verschieden, z. B. hat Büttner keine Umschaltung für Addition und Subtraktion, sondern die Kurbel wird für letzteren Zweck rückwärts gedreht, ferner stehen im Stellwerk die Ziffern in gerader Reihe nebeneinander, was übrigens bei den meisten neueren Maschinen aller Konstruktionen durch Sichtbarmachung der Einstellung in einer besonderen Reihe von Schaulöchern ebenfalls herbeigeführt wird.

Fig. 13.

17. Rechenmaschine Gauß. Wie die Hahnsche und J. H. Müllersche Rechenmaschine haben die Circular Calculating-Machine von J. Edmonson in Halifax (Engl.) und die deutsche „Gauß" von Ch. Hamann eine kreisförmige Gestalt (Fig. 14). Die Vorzüge der Gauß bestehen in ihrer kleinen Form und entsprechend geringerem Preise und ihrer Handlichkeit, in dem durch die noch zu erwähnende Stufenscheibe erzielten sanften Gange und in dem durch ihre Bauart begründeten Umstande, daß eine Einschränkung der Ziffernzahl des Multiplikators und des Quotienten nicht eintritt, wenn die Maschine zunächst auch auf 10 Stellen eingerichtet ist. Diesen Vorteilen steht ein wesentlicher Nachteil gegenüber, der darin liegt, daß die eingestellten und die abzulesenden Ziffern im Kreise, also entweder für den Beschauer zum Teil auf dem Kopfe stehen, oder teils ihre Köpfe nach innen und teils nach außen richten.

Die Maschine besteht aus einer festen mit dem Fuß verbundenen Dose und der durch einen Hebel abhebbaren Kapsel, in deren Deckel sich in radialer Anordnung 6 Einstellschlitze befinden. (Fig. 14.) Unter jedem dieser Schlitze liegt eine ebenfalls radiale Achse *f* mit einem darauf verschiebbaren Zahnrad *z*, das durch

eine an jedem Einstellknopf S unten angebrachte Gabel auf f verstellt wird (Fig. 15). Es sei sogleich noch erwähnt, daß am äußeren Ende jeder Achse f auch noch ein festes Zahnrad r mit 10 Zähnen sitzt, das sich mit seiner Achse dreht.

Fig. 14.

Über dem Deckel befindet sich die Kurbel K, welche eine durch seine Mitte und durch die Maschine hindurchgehende senkrechte Achse x dreht. Diese Achse trägt in der Mitte die horizontal liegende Stufenscheibe *Sch*. Sie dreht sich mit der Kurbel, während die anderen Teile der Maschine in ihrer Lage bleiben. Die Oberseite dieser Scheibe trägt 9 konzentrisch angeordnete Reihen von Zähnen, von denen die innerste 9 Zähne, jede weiter nach außen liegende einen Zahn weniger besitzt, bis zur äußersten mit nur einem Zahne (Fig. 16). Wenn ein Knopf an einem der Einstellschlitze des Deckels auf eine bestimmte Zahl der am Schlitz stehenden Skala eingestellt wird, so geht das

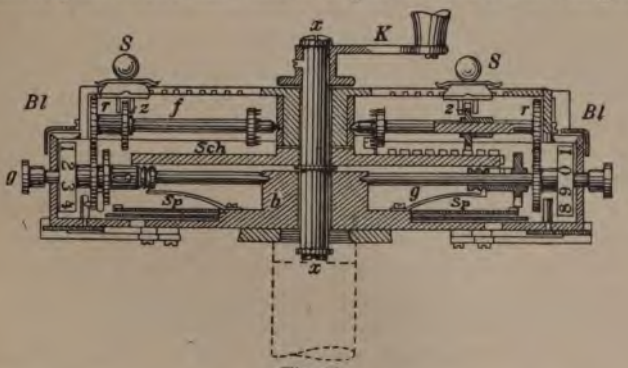


Fig. 15.

Zahnrad bei der Drehung der Scheibe über die Reihe mit derselben Zahl von Zähnen und erfährt daher eine Drehung um diese Zahl.

Die Zahnringe nehmen nur einen Bruchteil des ganzen Umkreises der Scheibe ein. Dicht hinter ihnen folgt bei der Drehung der Scheibe ein zungenartiges Sperrstück. Auf jeder Achse f befindet sich nämlich am zentralen Ende eine Scheibe mit 10 nach dem Innern der Maschine gerichteten Stiftchen. Wenn die Achse f über sämtliche Zähne hinweggegangen ist und das Rädchen z die vorgeschriebene Drehung vollführt hat, so schiebt sich das Sperrstück zwischen die Stiftchen und hält nun die Achse fest, damit sie sich nicht weiter drehen kann.

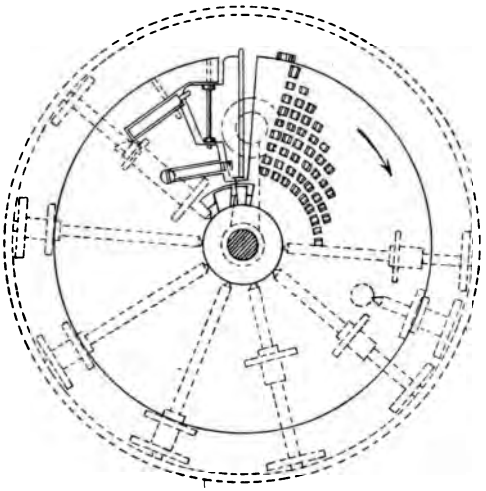


Fig. 16.

Unterhalb der Scheibe liegt das Zählwerk, das sich also in der eigentlichen Dose befindet. Indem die Stufenscheibe nicht bis an den Umfang der Dose heranreicht, übertragen die am Ende der Achse f sitzenden, oben erwähnten, festen Rädchen ihre Drehung auf ähnliche radiale Achsen g des unteren Raumes, die ebenfalls Zahnräder und an ihren Enden Scheiben mit Ziffern tragen. Diese Ziffernscheiben liegen unter einem Vorsprung des Dosenkastens und tragen die Ziffern auf ihrer Stirnfläche, die in runden Schaulöchern (bei Bl.) von oben aus sichtbar werden.

Die Verlegung des Zählwerkes in den untern Teil der Dose hat für die Zehnerübertragung Bedeutung. Beim Übergang einer Ziffernscheibe von 9 auf 0 wird nämlich, wenn soeben die Achse f_i mit ihrem Zahnrad z_i die verschiedenen Zähne der Stufenscheibe passiert hat, ein hinter diesen folgender Schalthebel durch eine Vorrichtung an der Achse g der Ziffernscheibe von unten aus in die Höhe gedrückt, so daß für das folgende Zahnrad z_{i+1} außer den festen Zahnstufen nun noch dieser Schalthebel als Zahn wirkt.

Dann folgt auf der Stufenscheibe ein Anschlag, durch den der Schalthebel wieder niedergedrückt und gleichzeitig der frühere Zustand im Zählwerk hergestellt wird.

Zwischen den Achsen g der Ziffernscheiben liegen andere Achsen h, welche die Umdrehungen der Kurbel (Multiplikator bzw. Quotient) zählen und ebenfalls Ziffernscheiben tragen, deren Schaulöcher zwischen den andern Schaulöchern (die das Produkt oder den Dividenden zeigen) liegen. Durch einen auf dem Vorsprung der Dose aufliegenden, verschiebbaren Ring ist immer die eine Art Ziffern verdeckt, die auch noch durch verschiedene Farbe von der andern Art unterschieden ist.

Die Subtraktion (Division) wird bei Kurbeldrehung in demselben Sinne ausgeführt, nachdem ein Stellknopf auf dem Deckel von Addition auf Subtraktion verschoben ist.

18. Sellings Maschine. Auf einem ganz andern Prinzip wie die vorher beschriebenen beruht die Multiplikationsmaschine von E. Selling in Würzburg (1887), das hier nur in seinen Hauptzügen erläutert werden möge.[1]) Hat man eine Nürnberger Schere[2]) und hält man den Anfangspunkt 0 fest, verschiebt den Punkt 1 um eine Strecke w, so verschiebt sich der Punkt 2 um $2w$, allgemein n um nw, da bei der Streckung die Diagonale jedes Parallelogramms sich um die gleiche Länge vergrößert. Selling hat 10 Kreuzungspunkte, er benutzt aus praktischen Gründen als festen Punkt einen mittleren. Da dies unwe-

Fig. 17.

1) E. Selling, Eine neue Rechenmaschine, Berlin 1887. Hartmann, Zeitschr. f. Instr. 1887, 403.

2) Sie gleicht einer Kette von Parallelogrammen, deren in der Mittelrichtung liegende Ecken von den Kreuzungspunkten der Arme der einzelnen Scheren gebildet werden. Die Arme der auf einander folgenden Scheren hängen in Gelenken zusammen, welche die anderen Eckpunkte der Parallelogramme bilden.

sentlich ist, denken wir uns wie vorher Punkt 0 fest und Punkt 1 durch einen Handgriff verschoben und die Verschiebung w an einer Skala gemessen. Mit der Schere wird eine in ihrer Längsrichtung liegende Zahnstange in Verbindung gesetzt, die, wenn der Punkt n mit ihr verbunden wird, die Verschiebung nw erfährt. Diese Zahnstange greift in ein senkrecht stehendes Zahnrad ein und dreht es um die entsprechende Zahl von Zähnen weiter. Um eine größere Anzahl von Zahnstangen gleichzeitig in Bewegung zu setzen, sind 2 ganz gleiche Nürnberger Scheren vorgesehen, deren gleichnamige Kreuzungspunkte durch Querschienen verbunden sind, so daß sich also die n^{te} Schiene um nw verschiebt. Verbindet man die Zahnstangen in der gewünschten Weise mit den Schienen, so kann man jeder eine bestimmte Bewegung und jedem zugehörigen Zahnrad eine entsprechende Drehung erteilen. Die Verbindung der einzelnen Zahnstangen mit den Schienen kann man sich durch Stifte bewerkstelligt denken, die man mit der Hand durch beide hindurchsteckt, indem sie in passenden Abständen durchlocht sind. Bei der Maschine wird diese Verbindung vermittelst einer Klaviatur hergestellt, so daß man auf die betreffenden Tasten drückt, um die einzelnen Zahnstangen mit der gewünschten Schiene zu verbinden. Die Klaviatur bewirkt also die Einstellung des Multiplikandus, während jede Ziffer des Multiplikators durch Bewegung der Schere hervorgebracht wird.

Eine andere abweichende Einrichtung besteht bei der Zehnerübertragung[1]), die im Gegensatz zu andern Maschinen immer mit dem gleichen, geringen Kraftaufwande vor sich geht. Sie findet kontinuierlich statt, ähnlich wie bei der Übertragung der Bewegung des Sekundenrades einer Uhr auf das Minuten- und Stundenrad. Bei den Ziffernrädern stehen daher die Zahlen nicht in gerader Richtung, sondern erscheinen etwas verschoben, wenn das vorhergehende Rad einen Bruchteil einer ganzen Umdrehung zurückgelegt hat, ähnlich wie der Minutenzeiger zwischen 2 Strichen steht, wenn der Sekundenzeiger der Uhr nicht auf 0 zeigt. Die Übertragung erfolgt dadurch, daß die Wellen der Zahnräder selbst gezahnt sind und ein anderes kleineres Rad in Drehung versetzen, welches von innen in ein anderes neben dem ersten liegendes größeres Rad eingreift, das mit dem folgenden Zahnrad verbunden ist.

1) Hier ist nur die ursprüngliche Konstruktion berücksichtigt, bei der neueren geschieht die Zehnerübertragung durch ein System von Storchschnäbeln bzw. Planetenrädern.

Durch geeignete Wahl der Radien dieser Räder läßt es sich erreichen, daß jedes folgende um 1 weiter rückt, wenn das vorhergehende um 10 sich gedreht hat.

Bei der Multiplikation mit mehrstelligen Multiplikatoren muß, ähnlich wie sonst, eine Verschiebung des Scherenwerks gegen das Räderwerk um je eine Stelle vorgenommen werden.

Selling hat auch eine automatische Aufzeichnung des Ergebnisses eingeführt, indem die Ziffern der Zifferräder erhaben sind und auf dem Papier einer Walze abgedruckt werden; unter dem auf die Walze gespannten Papier liegt das Farbe gebende Papier, so daß die Ziffern auf der Rückseite des weißen Papiers in richtiger Lage erscheinen.

19. Multiplikationsmaschine Millionär. Aus der Beschreibung geht hervor, daß die Sellingsche Maschine sich von den vor-

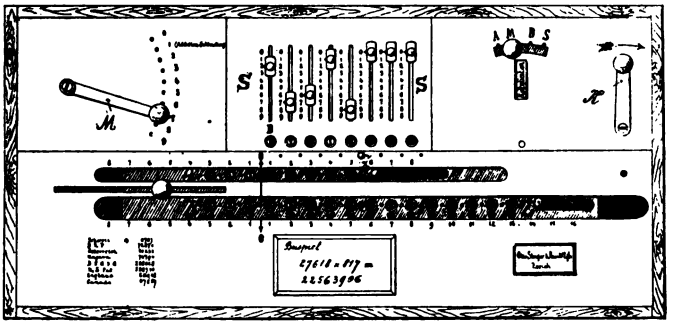


Fig. 18.

hergehenden dadurch unterscheidet, daß sie Multiplikationen ausführt. Die erste eigentliche Multiplikationsmaschine stammt, wie bereits erwähnt, von Bollée (1888), aber in den Handel gekommen ist wohl von Multiplikationsmaschinen nur die von Otto Steiger erfundene, die von Hans Egli in Zürich konstruiert und Millionär benannt ist.

Auf der Deckplatte erblickt man zwei Teile, die wir als vorderen und hinteren unterscheiden wollen. Der letztere (der obere in der Figur 18) zerfällt wieder in drei Abteilungen, deren mittelste die uns bereits bekannten (hier 8) Einstellschlitze enthält, vor denen in Schaulöchern sich die mit den Knöpfen eingestellten Zahlen durch Stahlbänderübertragung noch einmal zeigen. In der Abteilung rechts davon befindet sich die Umstellungseinrichtung, bei der ein Knopf

auf *A* (Addition), *M* (Multiplikation), *D*) Division) oder *S* (Subtraktion) geschoben wird und gleichzeitig das betreffende Wort sichtbar wird. In derselben Abteilung noch weiter rechts sehen wir die Kurbel, die immer nur in der Richtung des Uhrzeigers gedreht wird und vor jeder andern Operation in ihre Anfangsstellung einschnappen muß. Der Multiplikationshebel *M* in der linken hinteren Abteilung wird bei Addition und Subtraktion auf 1 gestellt, für Multiplikation und Division auf die betreffende Zahl des Multiplikators und Divisors. Der vordere Teil der Deckplatte zeigt zwei Reihen von Schaulöchern, in der hinteren, der Kontrollreihe *QQ* erscheint der Multiplikator (Quotient) in 8 Schaulöchern, während in den 16 Schaulöchern der vorderen, der Resultatreihe *ZZ*, das Produkt (Dividend) sich zeigt. Für jede dieser Reihen ist eine Auslöschvorrichtung vorhanden, durch deren seitliche Bewegung sämtliche Ziffernscheiben auf Null gestellt werden. Dieser vordere Teil kann durch Druck auf einen Knopf, die Wagenschiebevorrichtung, von Hand hin- und hergeschoben werden, um die Zahlen der Kontroll- und Resultatenreihe in einer der 8 möglichen Stellungen zu erhalten. Bei der Multiplikation (und Division) schiebt der Wagen sich nach jeder Kurbeldrehung selbsttätig um eine Stelle nach links weiter.

Man unterscheidet drei Hauptmechanismen bei dieser Maschine: den Multiplikationsmechanismus, den Übertragungsmechanismus und das Registrierwerk.

Das Verständnis des Multiplikationsmechanismus wird durch das Rechenverfahren mit den Neperschen Rechenstäben[1])

1) Die Bacilli Neperiani oder Virgulae numeratrices (von J. Blater wird eine „Erleichterungstafel" in den Handel gebracht, auch andere ältere und neuere Formen sind im Gebrauch) sind vierkantige Stäbchen, auf denen jede der 4 Seitenflächen das einfache Einmaleins für die jedesmal am Kopfe stehende Zahl enthält. Durch Zusammenstellung verschiedener Stäbchen findet man das 2 bis 9fache beliebiger mehrstelliger Zahlen, wenn man die durch Diagonallinien getrennten, schräg untereinander stehenden Zahlen addiert. Wir berechnen z. B. die Vielfachen von $M = 0{,}434294$ (Modulus) mit Beschränkung auf 6 Dezimalstellen. Wir suchen die Stäbchen bzw. diejenigen ihrer Seitenflächen aus, welche die Über-

Index	0	4	3	4	2	9	4
2	0 0	0 8	0 6	0 8	0 4	1 8	0 8
3	0 0	1 2	0 9	1 2	0 6	2 7	1 2
4	0 0	1 6	1 2	1 6	0 8	3 6	1 6
5	0 0	2 0	1 5	2 0	1 0	4 5	2 0
6	0 0	2 4	1 8	2 4	1 2	5 4	2 4
7	0 0	2 8	2 1	2 8	1 4	6 3	2 8
8	0 0	3 2	2 4	3 2	1 6	7 2	3 2
9	0 0	3 6	2 7	3 6	1 8	8 1	3 6

erleichtert. Stellt man z. B. an den 8 Schlitzen SS die Zahlen 00434294 ein, die gleichzeitig in den Schaulöchern erscheinen, so stellt man, um das 7fache der Zahl zu erhalten, den Knopf auf M und den Hebel M auf 7 ein. Nach dem ersten Viertel einer Umdrehung der Kurbel K erscheinen dann in den Schaulöchern der Reihe ZZ die Ziffern 00222162, die während des weiteren Verlaufs derselben Kurbeldrehung infolge der selbsttätigen Wagenverschiebung um eine Stelle nach links rücken: 02221620. Dann wird die Zahlenreihe 00818438 zunächst ohne Zehnerübertragung hinzuaddiert, so daß 02*039*058 erscheint, erst beim letzten Viertel der Drehung tritt die Zehnerübertragung (von den durch den Druck hervorgehobenen Zahlen nach links wirkend) in Erscheinung, so daß 03040058 entsteht. In der Kontrollreihe QQ zeigt sich der Multiplikator: 00000007.

Wir sehen uns jetzt die inneren Einrichtungen an, um diese Vorgänge zu begreifen. Unter jedem der 8 Schlitze S befindet sich parallel mit ihm je eine vierkantige Achse, auf der ein Zahnrad z hin- und hergleitet, der Stellung des Knopfes an der Einstellung entsprechend. Am vorderen, dem Beschauer zugewandten Ende befinden sich an den Achsen festsitzende, in einer Ebene liegende Räder, welche die Drehung der Achsen auf die Zählscheiben des vorderen, beweglichen Teils der Maschine (des Registrierwerks), ähnlich wie bei der Thomasschen Maschine, übertragen. Die verschiebbaren Räder z greifen von oben in 9 unter ihnen quer zu den Schlitzen liegende Zahnstangen Z ein, von denen Z_1 unter den Ziffern 1 sämtlicher Schlitze, allgemein Z_i unter $i = 1, 2 \ldots 9$ liegt. Nur unter den Nullen liegt keine Zahnstange. Diese untereinander gleichen Zahnstangen Z sind in ihrer Längsrichtung verschiebbar.

Die Bewegung der Zahnstangen Z geschieht nun durch den sogenannten Einmaleinskörper, der links hinten unter dem Multiplikationshebel M liegt. Wir denken uns ihn durch horizontale Schnitte in 9 Zungenplatten zerlegt, von denen die erste zu unterst, die neunte zu oberst liegt. Auf der linken Seite liegen die Endflächen aller Zungenplatten in einer senkrechten Ebene, wäh-

schriften 0, 4, 3, 4, 2, 9 und 4 tragen, legen noch den Indexstab mit den Zahlen 2 bis 9 davor und lesen das siebenfache von M ab:

$$\begin{array}{r} 0818438 \\ 222162 \\ \hline 7\,M = 3{,}040058 \end{array}$$

rend sich die einzelnen Zungen nach rechts in verschiedener Länge in der Richtung auf die Zahnstangen hin erstrecken.

Jede Zungenplatte stellt das Einmaleins der Zahl dar, mit der wir sie numeriert haben. Die Längen der horizontal nebeneinander liegenden, im Querschnitt gleichen Zungen sind von der gemeinsamen Grundfläche aller Platten aus gerechnet, der Reihe nach, von hinten nach vorn geordnet:

bei der 1. Platte: 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9.
„ „ 2. „ 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8.
„ „ 3. „ 0,3; 0,6; 0,9; 1,2; 1,5; 1,8; 2.1; 2,4; 2,7.
„ „ 4. „ 0,4; 0,8; 1,2; 1,6; 2,0; 2,4; 2,8; 3,2; 3,6 usf.

Die Zeichen haben wir nur dazwischen gesetzt, um die Anordnung besser zu veranschaulichen. Wir sehen, daß in jeder Platte auf eine Zehnerzunge eine Einerzunge folgt. In Wirklichkeit existieren nicht verschiedene Platten, sondern der ganze Körper ist aus einem Stück gearbeitet.

Dieser Einmaleinskörper läßt sich nun in drei zueinander senkrechten Richtungen verschieben, die wir als räumliche Koordinatenrichtungen unterscheiden können. Der Hebel M besorgt durch ein Hebelwerk, das mit Kegelrädern und Zahnstangen arbeitet, die Bewegung auf und abwärts (Richtung der z-Achse). Wird M auf 0 gestellt, so nimmt der Körper die tiefste ihm mögliche Stellung ein, er liegt dann ganz unterhalb der Ebene, in der sich die Zahnstangen befinden. Stellt man aber z. B. M auf 4, so liegt die vierte Zungenplatte den schmalen Enden der Zahnstangen gegenüber. Die erste Vierteldrehung der Kurbel K bewirkt nun eine Bewegung des Multiplikationskörpers von links nach rechts auf die Zahnstangen hin (Richtung der x-Achse). Die Lage des Einmaleinskörpers ist hierbei so, daß die Zehnerzungen an die Zahnstangen stoßen, die Einerzungen aber in die Zwischenräume zwischen den Zahnstangen zeigen. Ist z. B. wieder 00434294 an den Schlitzen S eingestellt, und soll diese Zahl mit 4 (M auf 4) multipliziert werden, so stehen die 9 Zehnerzungen der vierten Platte mit den Längen 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3 von hinten nach vorn geordnet den Zahnstangen 1 bis 9 gegenüber. Wir erhalten folgende Übersicht (von oben gesehen in der x-y-Ebene)[1]):

1) Unter den Einstellknöpfen 0, 0 liegt keine Zahnstange; über den Zahnstangen 1, 5, 6, 7, 8 befinden sich im Beispiel keine Einstellknöpfe, in diese Zahnstangen greifen daher auch keine Zahnräder ein, die sich ja unter den Knöpfen befinden.

Zungenlängen der Platte 4.	Zahnstangen —	Einstellungen (S)
		0 0 . . . .
0	1	. . . .
0	2	. . . . . 2 . .
1	3	. . . 3 . . . .
1	4	. . 4 . 4 . . 4
2	5	. . . .
2	6	. . . .
2	7	. . . .
3	8	. . . .
3	9	. . . . . 9 .
		S 0 0 4 3 4 2 9 4
		Z 0 0 1 1 1 0 3 1.

Die Zungen und die Zahnstangen sind von links nach rechts gerichtet (x-Achse). Durch die Rechtsbewegung des Einmaleinskörpers wird, wie man sieht, keine Verschiebung der Zahnstange 2 verursacht, da die gegenüberliegende Zungenlänge 0 ist, dagegen werden die Zahnstangen 3 und 4 je um eine Einheit, die Zahnstange 9 um 3 Einheiten nach rechts verschoben. Gleichzeitig werden die darüber gestellten Zahnräder um dieselbe Anzahl von Zähnen gedreht, welche die Reihe ZZ, deren Scheiben vorher auf 0 standen, anzeigt.

Die Kurbel K setzt ein Kegelrad in Bewegung, in das ein anderes mit halb so großem Radius eingreift, so daß dieses bei einmaliger Kurbeldrehung zwei Umdrehungen vollführt. Dieses zweite Rad setzt aber mittels einer mit ihm durch einen Kurbelzapfen verbundenen Pleuelstange und eines Schlittenwerkes den Einmaleinskörper in Bewegung und schiebt ihn daher bei einer einzigen Kurbeldrehung zweimal hin und her (in der Richtung der x-Achse) um eine durch den Durchmesser des vom Kurbelzapfen beschriebenen Kreises bestimmte Länge. Bevor nun die zweite Bewegung des Einmaleinskörpers gegen die Zahnstangen beginnt, findet durch einen ebenfalls durch die Kurbel K betätigten Mechanismus eine Bewegung des Körpers in der dritten Koordinatenrichtung (y-Richtung), vom Beschauer gesehen, nach hinten statt, die so bemessen ist, daß jetzt die Einerzungen den Zahnstangen gegenübertreten, während die Zehnerzungen in die Zwischenräume zwischen den Zahnstangen gerichtet sind, also unwirksam werden.[1]) Ferner ist vorher auch eine Verschiebung des Wagens um eine Stelle nach links ebenfalls durch die Kurbeldrehung erfolgt. In unserm

1) In der folgenden Übersicht sind die Längen der Zehnerzungen in Klammern nochmals beigefügt, obgleich sie nicht in Betracht kommen.

Beispiel zeigt sich also unmittelbar vor der zweiten Rechtsbewegung des Einmaleinskörpers folgendes Bild:

Zungenlängen der Platte 4.	Zahnstangen fehlt	Einstellungen (SS)
(0)		0 0 . . . . .
4	1	. . . . .
(0)		
8	2	. . . . . 2 . .
(1)		
2	3	. . . 3 . . . .
(1)		
6	4	. . 4 . 4 . . 4
(2)		
0	5	. . . . .
(2)		
4	6	. . . . .
(2)		
8	7	. . . . .
(3)		
2	8	. . . . .
(3)		
6	9	. . . . . 9 .

$$\begin{array}{rcccccccc} S & 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & 2 & 9 & 4 \\ \left[Z\right. & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0^{1}). & \\ \left.+\right] & 0 & 0 & 6 & 2 & 6 & 8 & 6 & 6 \\ & 0 & 1 & 7 & 3 & 6 & \mathit{1} & 7 & 6. \end{array}$$

Die Vorwärtsbewegung der Zungen und die dadurch bewirkte Verschiebung der Zahnstangen und Drehung der Achsen der eingreifenden Zahnräder verändert die Ziffern von Z um die mit + hinzugefügte Zahl, so daß die Endzahl herauskommt. Beim letzten Viertel der Kurbeldrehung tritt die Zehnerübertragung ein, so daß 01737176 erhalten wird.

Hiermit haben wir die wesentlichen Bestandteile dieser zurzeit wohl vollkommensten Multiplikationsmaschine hervorgehoben, die andrerseits durch ihre Größe etwas unhandlicher ist.

20. Differenzenmaschinen. Zur Berechnung von Tafelwerken ist die unbedingte Sicherheit einer Rechenmaschine von solcher Bedeutung, daß sich trotz der großen Kosten die Konstruktion einer besonders hierfür geeigneten Maschine lohnt. Dieses Problem hat insbesondere Ch. Babbage[2]) um 1812 in Angriff genommen,

1) Gegen oben um eine Stelle verschoben.

2) Das Buch von Charles Babbage, Passages from the life of a Philosopher, London 1864 ist z. T. sehr amüsant geschrieben. Der

doch ist sein Werk nur teilweise zur Vollendung gekommen. Dagegen sind die von G. und E. Schütz und von M. Wiberg[1]) ersonnenen Maschinen zur nutzbringenden Verwendung gekommen. In neuester Zeit ist eine Differenzenmaschine von Ingenieur Hamann in Berlin-Friedenau nach Angaben von J. Peters für die Herstellung einer logarithmisch-trigonometrischen Tafel mit 8 Dezimalstellen (herausgegeben von Bauschinger und Peters, Leipzig 1910) konstruiert worden, welche die Resultate gleichzeitig druckt (Fig. 19 a). Sie besteht aus zwei gleichartigen, voneinander unabhängigen Rechenmaschinen I und II zu je 16 Stellen nebst dem zugehörigen Druckwerk III. Sie ist auf die Rechnung mit zweiten Differenzen zugeschnitten, die bei genügend engem Intervalle der zu berechnenden Funktionen für längere Reihen konstant bleiben.

Nimmt man an, daß in einem bestimmten Zeitpunkte das Zählwerk der Maschine II den Funktionswert, das Zählwerk der Maschine I die erste Differenz anzeigt und daß letztere gleichzeitig im Schaltwerk II enthalten ist, so wird die zweite Differenz im Schaltwerk I eingestellt, durch Drehung einer Kurbel *a* zur ersten Differenz in Zählwerk I und Schaltwerk II zugefügt, und diese durch eine zweite Kurbel *b* dem Funktionswert (im Zählwerk II) zugelegt, durch Kurbeln wird das Druckwerk betätigt.

Die umstehende Figur 19 b gibt ein Bild des Vorganges, wie er an jeder der 16 Stellen stattfindet. An dem Knopf, der die Achse 1 dreht, wird die zweite Differenz auf der durch ein Schauloch ablesbaren Scheibe 5 eingestellt. Durch die Drehung der Kurbel *a* wird erstlich die Doppelzahnstange 23 in ihrer Längsrichtung verschoben und dadurch das auf der festen Achse 9 drehbar gelagerte Zahnrad 10 herumgedreht, bis durch Übertragung seiner Umdrehung auf das Zahnrad 4, mit dem sich die Achse 1 dreht, im Schauloch der Scheibe 5 eine Null erscheint. Durch Fehlen eines Zahnes bei 4 läßt sich diese Begrenzung der Bewegung erreichen, indem dann 10 nicht mehr eingreift. Dieselbe Kurbelbewegung (*a*) hat die Achse 24 um den Zapfen 25 gedreht und Rad 7 so weit nach rechts verschoben, daß vermöge einer Flansche die Achse 3 an den Drehungen von Achse 1 teilnimmt. Es möge hier gleich bemerkt werden, daß mit dieser Achse die Ziffern-

Bericht über die Differenzenmaschine sowie über die spätere analytische Maschine zieht sich wie ein roter Faden durch das Werk.

1) M. Wiberg, Logarithm-Tabeller, Stockholm 1875 sind mit der Maschine gerechnet.

Fig. 19 a.

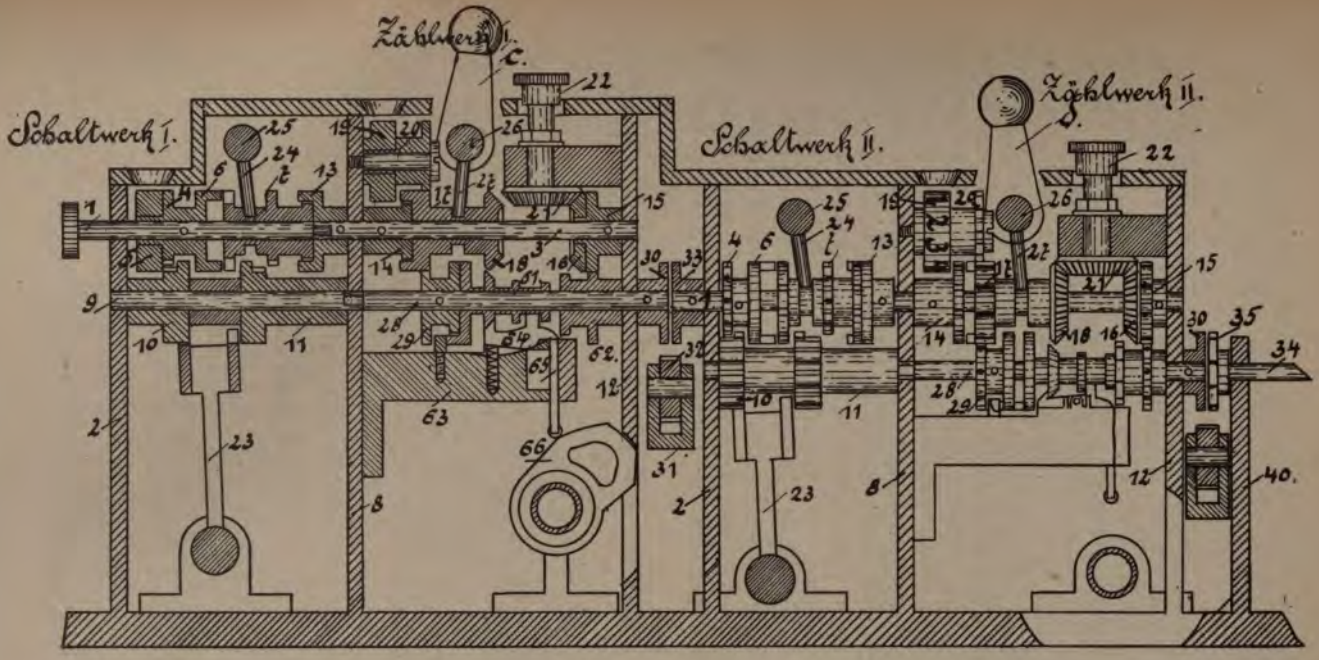


Fig. 19 b.

(Vgl. die Erläuterungen zu dieser Figur in Bauschinger-Peters logarithmisch-trigonometrischer Tafel.)

scheibe 19 des Zählwerkes I in Verbindung steht. Nach der Hälfte der Drehung der Kurbel *a* kippt die Zahnstange 23, die sich um eine Achse dreht, von Rad 10 hinweg und nach Rad 11 hinüber, durch welches Rad 7 auf Achse 1 um ebensoviel Zähne vorwärts gedreht wird, als es vorher zurückbewegt wurde. Da aber inzwischen Achse 24 Rad 7 mit Rad 4 verkoppelt und von der Verbindung nach rechts gelöst hat, so wird Rolle 5 wieder auf die frühere Einstellung gebracht. Auf Rolle 5 ist also der frühere Wert eingestellt, während im Zählwerk I, das ja nur an der ersten halben Bewegung teilgenommen hatte, der Wert der zweiten Differenz hinzugefügt ist. Nun hat aber die Achse 3 ihre Bewegung gleichzeitig auch auf Achse 28 übertragen, die mit der Achse 1 der Maschine II gekoppelt ist. Diese Achse trägt also keinen Einstellknopf, sondern wird von Achse 28 der Maschine I um ebensoviel gedreht, als die Änderung im Zählwerk I beträgt. Sonst ist die Einrichtung von II entsprechend, nur kommt die hier nicht ohne besondere Figuren erklärbare Druckvorrichtung hinzu. Die Hebel *c* und *d* dienen zur Umschaltung von Addition auf Subtraktion.

21. Anforderungen an eine Rechenmaschine. Zum Schlusse stellen wir als Anforderungen an eine moderne Rechenmaschine die folgenden auf:

Durchgehende Zehnerübertragung sowohl im Zählwerk (bzw. Warnungsglocke) als auch im Quotienten.

Automatischer Stellentransport.

Auslöschvorrichtung für die Einstell- und die Resultatenreihen.

Ein Druckwerk, welches wenigstens das Resultat druckt, wenn möglich auch die Aufgabe (aber nicht vom Einstellwerk aus).

III. Abschnitt.

Die Meßrolle.

22. Einrichtung und theoretische Grundlagen. Eine Rolle, d. h. eine kreisrunde Scheibe, die auf einer ebenen Fläche, sich um ihre Achse drehend, fortbewegt wird, kommt bei einer großen Anzahl von Instrumenten zur Verwendung. Ist ihr Rand scharf, so hat sie die Eigenschaft, eine bestimmte Richtung inne zu halten, aus der sie nur durch Drehung um ihren Auflagepunkt, den Berührungspunkt mit der Zeichenebene, in eine andere Rich-

tung übergeführt werden kann. Rollen von dieser Beschaffenheit oder auch an ihrer Stelle Schneiden von etwas gekrümmter Form werden bei Planimetern und Integraphen in Anwendung gebracht.

Eine noch häufigere Benutzung erfahren Rollen mit einem flachen oder auch etwas abgerundeten Rande als Meßrollen. Sie sind dann entweder mit einer Teilung an ihrem Rande versehen, die mit Hilfe eines an der Drehung nicht teilnehmenden Index abgelesen wird, oder ihre Achse steht mit einem Zählwerk in Verbindung, welches die vollen Umdrehungen der Rolle und deren Bruchteile angibt. Die Rollenumdrehungen, die man auf diese Weise abliest, messen bei bekanntem Halbmesser der Rolle den von ihrem Mittelpunkt zurückgelegten Weg. Bezeichnen wir den Halbmesser der Rolle mit ϱ und nehmen wir an, das sie sich beim Durchlaufen einer geradlinigen Strecke s um den Winkel ω dreht, so beschreibt ein Punkt ihres Umfanges den Bogen $\varrho\omega = \sigma$, welcher der durchlaufenen Strecke ($\sigma = s$) gleich ist. Für unendlich kleine Wegstrecken ds gilt die Gleichung $\varrho \cdot d\omega = d\sigma = ds$, aus der für ein Kurvenstück von der Länge S zwischen zwei Punkten A und B: $\varrho \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega = \varrho(\omega_2 - \omega_1) = \sigma_2 - \sigma_1 = S$ folgt. Wir nennen σ bzw. $d\sigma$ auch die Abwicklung der Rolle.

Eine Voraussetzung für die Zuverlässigkeit der Messung ist die, daß die Rolle, die mit einem sanften Druck gegen die Unterlage gedrückt wird, sich in jedem Augenblick wirklich dreht und nicht gleitet. Ein Gleiten der Rolle, bei dem sie sich nicht dreht, sondern stets in demselben Punkte die Unterlage berührt, muß dagegen stattfinden, wenn eine Verschiebung der Rolle in der Richtung ihrer Achse vorkommt. Wenn die Richtung der Rollenbewegung oder was dasselbe ist, die Ebene der Rolle nicht mit der Richtung des Weges (bei Kurven mit der Tangente) zusammenfällt, sondern beide Richtungen einen Winkel α mit einander bilden, so kann man sich die Rollenbewegung in zwei Bewegungen zerlegt denken, von denen die eine senkrecht zur Rollenachse, die andere in der Richtung der Rollenachse sich vollzieht. Die Abwicklung ist dann nicht dem zurückgelegten Wege gleich, sondern gibt nur die Komponente, die senkrecht zur Rollenachse liegt, daher ist $d\sigma = ds \cdot \cos\alpha$.

Wir schalten noch ein, daß es nicht notwendig ist, daß die Rolle senkrecht zur Unterlage steht, sondern daß ihre Abwicklung

dieselbe bleibt, wenn ihre Ebene gegen die Unterlage geneigt ist, so lange nur eine ungehinderte Drehung stattfindet und keine Reibung sie verhindert.

23. Verschiedene Mechanismen und Ersatz der Rolle durch Zylinder usw. Da es ferner nur auf die relative Bewegung ankommt, so kann die Rolle auch fest stehen und die Unterlageebene unter ihr verschoben werden. Ein derartiger Fall kommt vor, wenn es sich darum handelt, eine geradlinige Bewegung in eine kreisförmige zu verwandeln. Hierbei ruht die Rolle auf einer rotierenden Kreisscheibe auf, wobei ihre Achse meist nach dem Mittelpunkt der Scheibe gerichtet ist. Wenn die Entfernung des Auflagepunktes vom Mittelpunkt e ist und die Scheibe sich um einen kleinen Winkel $d\varphi$ dreht, so ist die Abwicklung der Rolle $d\sigma = e\,d\varphi$.

Sind φ_1 und φ_2 die Winkel, welche ein Scheibenhalbmesser ϱ vor und nach der Drehung mit einer beliebig gewählten Anfangsrichtung einschließt, und ω_1 und ω_2 die entsprechenden Ablesungen an der Rolle, so erhält man $(\omega_2 - \omega_1) = \frac{e}{\varrho}(\varphi_2 - \varphi_1)$ oder auch $\sigma_2 - \sigma_1 = e(\varphi_2 - \varphi_1)$, wofür wir kurz $\sigma = e\varphi$ schreiben wollen. Häufig wird e veränderlich sein, indem etwa die Drehung $d\varphi = p \cdot dx$ der Änderung der x-Koordinate proportional ist, während $e = y$ der y-Koordinate gleich gemacht wird. Ist dann $y = f(x)$ gegeben, so wird $\sigma_2 - \sigma_1 = p\int_{x_1}^{x_2} y\,dx$ oder auch $\omega_2 - \omega_1 = \frac{p}{\varrho}\int_{x_1}^{x_2} y\,dx$.

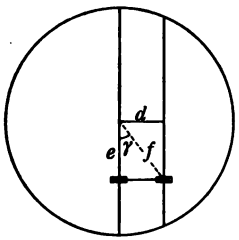


Fig. 20.

Diesen Fall werden wir z. B. beim Hansenschen Planimeter kennen lernen.

Es ist nicht nötig, daß die Achse der Rolle mit einem Durchmesser der ruhenden Scheibe zusammenfällt, es genügt, daß sie ihm parallel ist (Fig. 20). Findet nämlich eine Verschiebung längs einer Sehne statt, die den Abstand d vom Mittelpunkt der Scheibe hat, ist ferner f die Entfernung des Rollenauflagepunktes vom Mittelpunkt der Scheibe, γ der Winkel, den f mit dem der Rollenachse parallelen Durchmesser bildet, so ist bei einer Scheibendrehung $d\varphi$ die Abwicklung der Rolle $d\sigma = f \cdot d\varphi \cdot \cos\gamma$ oder $d\sigma = e\,d\varphi$, d. h. die Abwicklung ist dieselbe, als wenn die Rolle in ihrer Ebene nach dem Durchmesser

verschoben wird, und ihre Achse nach dem Mittelpunkt der Scheibe gerichtet ist.

Diese Verbindung von Scheibe und Rolle scheint zuerst Poncelet angewendet zu haben, sie wird in der Regel als Gonellascher Integrationsmechanismus bezeichnet, da Gonella sie durch sein Planimeter allgemeiner bekannt gemacht hat.

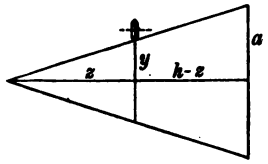


Fig. 21.

Die Kreisscheibe kann als besonderer Fall eines Kreiskegels aufgefaßt werden, wenn nämlich sein Öffnungswinkel 180^0 beträgt. Läuft eine Rolle auf einer Kegelfläche, die sich um ihre Achse um den Winkel $d\varphi$ dreht, und ist die Rollenachse der Kegelachse parallel, so möge der Berührungspunkt der Rolle sich auf dem Kreise mit dem Radius y bewegen, der von der Kegelspitze den Abstand z hat (Fig. 21). Dann ist die Abwicklung $d\sigma = y\,d\varphi$ oder wenn a der Radius des Grundkreises des Kegels und h seine Höhe ist, $d\sigma = \frac{az}{h}\,d\varphi$. Auch hier kann $z = \varphi(x)$ und $d\varphi = p \cdot dx$ sein, so daß man entsprechend wie früher $\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{a}{h}\,p \int_{x_1}^{x_2} z\,dx$ erhält.

Die Kegelfläche ist nicht die einzige gekrümmte Oberfläche, auf der man eine Rolle laufen läßt. Insbesondere kommt auch ein Mechanismus in Betracht, wo die Rolle auf einer Kugeloberfläche läuft. Wir nehmen zunächst an, daß die Rolle senkrecht auf ihr steht, d. h. daß ihre Ebene einen größten Kreis BNN' aus der Kugel ausschneidet. Es sei O der Mittelpunkt der Kugel, B der Berührungspunkt der Rolle, der Kugelradius $OB = r$, der Rollenradius $BR = \varrho$. Die Kugel drehe sich um einen Durchmesser PP' als Achse, mit dem der Radius OB den Winkel δ einschließe. Dreht sich die Kugel um ihre Achse um den Winkel $d\varphi$, so bewegt sich der Berührungspunkt B auf einem kleinen Kugelkreise mit dem Radius $r \sin\delta$ und beschreibt einen Bogen $r \sin\delta\, d\varphi$. Die Bewegung der Rolle wird teils eine rollende, teils eine gleitende sein und nur die erstere hat eine Drehung der Rolle zur Folge. Wenn wir den Winkel PBN

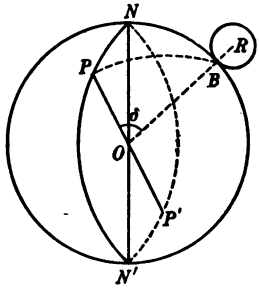


Fig. 22.

mit γ bezeichnen, d. h. den Winkel, welchen der sphärische Radius des Berührungspunktes B der Rolle mit der Ebene der Rolle oder auch mit dem größten Kreise NBN' einschließt, so beträgt die Abwicklung der Rolle $d\sigma = r \sin\delta \sin\gamma \, d\varphi$, da ja die Rollenebene mit der Bewegungsrichtung des Berührungspunktes (der Tangente des kleinen Kreises) den Winkel $90^0 - \gamma$ einschließt.

Wenn die Rollenebene einen kleinen Kreis aus der Kugel ausschnitte und die Rolle infolgedessen schräg auf der Kugel stände, so wäre die Abwicklung dieselbe, nur müßte dann der Winkel γ als der Winkel zwischen der sphärischen Tangente desjenigen kleinen Kugelkreises, den die Ebene der Rolle ausschneidet, und dem sphärischen Radius des andern kleinen Kreises, den der Berührungspunkt B bei der Drehung der Kugel beschreibt, definiert werden.

Aus praktischen Gründen tritt bei vielen Instrumenten an Stelle der Rolle, die auf einer gekrümmten Fläche läuft, ein Zylinder, also gewissermaßen eine große Zahl von Rollen mit gemeinsamer Achse. An Stelle der Verschiebung einer Rolle in der Richtung ihrer Achse findet dann ein Wälzen oder Kippen des gegen die Fläche gedrückten Zylinders statt, so daß der Berührungspunkt des Zylinders sich auf ihm verschiebt und verschiedene Rollen, aus denen wir uns ihn zusammengesetzt denken, nach einander in Berührung mit der krummen Oberfläche kommen. Auch ist in einzelnen Fällen der Versuch gemacht worden, die Rolle durch eine Kugel zu ersetzen, deren Umdrehungen um eine Achse gemessen werden, und die auf einer andern Kugel rollt.

Alle diese Mechanismen mit gekrümmten Flächen bezwecken, unbeabsichtigte Bewegungen des Meßapparates zu verhindern, indem seitliche Bewegungen einer Meßrolle auf einer ebenen Fläche infolge von Unebenheiten u. dgl. Drehungen der Rolle nicht ausschließen, also das Ergebnis verfälschen. Bei krummen Flächen ist dagegen die Forderung, daß die Berührung immer nur in einem Punkte stattfindet, leichter erfüllbar.

Insbesondere ist hierbei noch auf eine Bemerkung Rücksicht zu nehmen, die Clark Maxwell zuerst gemacht hat, daß bei einer seitlich wirkenden Kraft, die nicht genau mit der Richtung der Rollenachse zusammenfällt, die eine Komponente (senkrecht zur Rollenachse) eine Rollbewegung verursacht, wenn die Rolle in dieser Richtung rollen kann, wie dies bei ebener Unterlage der Fall ist.

IV. Abschnitt.

Stetige Rechenapparate.

Die im vorigen Abschnitte beschriebenen kinematischen Grundlagen können zur Ausführung derselben Rechenoperationen dienen, die durch Rechenmaschinen in ganz anderer Weise zu Stande kommen.

24. Addition und Subtraktion. Hierher gehört zunächst der sog. Proportionalrechenschieber von Ch. Hamann. Ein scharfrandiges Stahlrad R wird mit seiner horizontalen Achse gabelförmig (oder in einem ringförmigen Lager wie in der Fig. 23) von einem Arm gehalten, dessen anderes Ende einen Indexstift m umfaßt, der sich in einem Schlitz längs einer Skala M verstellen läßt. Das Rad trägt einen zur Richtung M senkrechten, horizontal liegenden Zylinder C, der das Rad senkrecht über seinem Mittelpunkte berührt. Dieser Zylinder läßt sich in der Richtung seiner Achse verschieben und trägt einen Index S, dessen Stellung an einer zu M (y-Achse) senkrechten Skala A (x-Achse) abgelesen wird. Wird S auf einen bestimmten Punkt der Skala A eingestellt und festgehalten, so daß die Richtung des Armes mR unverändert bleibt, und der Zylinder in seiner Längsrichtung um eine bestimmte Strecke verschoben, so findet eine Drehung des Rades und gleichzeitig des auf ihm ruhenden Zylinders statt. Diese Drehung ist proportional der Einstellung $Om = y$ und wird durch eine mit der Zylinderachse verbundene Zählvorrichtung abgelesen. Bezeichnen wir nämlich den Winkel, den eine Senkrechte RO auf M, welche die konstante Länge l hat, mit der Richtung des Armes Rm einschließt, mit α, so bewirkt eine Verschiebung dx des Zylinders in der x-Richtung eine Drehung der Rolle um $d\omega$ und die Abwicklung der Rolle ist $\varrho\, d\omega = d\sigma$. Durch die Rollendrehung wird eine Drehung des Zylinders $d\varphi$ um seine Achse veranlaßt, die für einen Zylinderhalbmesser r eine Verschiebung $r\, d\varphi$ des Berührungspunktes auf der Zylinderfläche in der Richtung der y-Achse zur Folge hat. Der Weg des Berührungspunktes auf der Rolle ist die Resultante der beiden rechtwinkligen Komponenten dx und $r\, d\varphi$. Es ist daher $\cos\alpha\, d\sigma = dx$, $\sin\alpha\, d\sigma = r\, d\varphi$ und $d\varphi = \frac{dx}{r} \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Ander

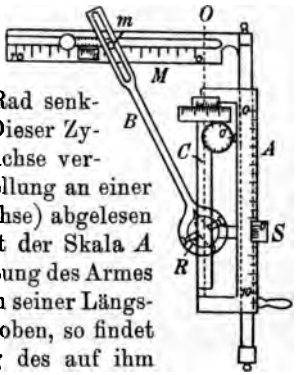


Fig. 23.

seits ist aber $l \operatorname{tg} \alpha = y$, also $d\varphi = \frac{1}{rl} \cdot y dx$, mithin $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{1}{lr} \cdot y(x_2 - x_1)$. Verschiebt man den Zylinder um seine ganze Länge a und setzt $\frac{a}{lr} = c$ einer Konstanten gleich, so ist die Zylinderdrehung $\varphi_2 - \varphi_1 = cy$. Beim Addieren stellt man den ersten Summanden y_1 mit m ein, führt den Zylinder in seiner ganzen Länge über das Rad R hinweg, dann zeigt die Umdrehungszahl (wenn man $c = 1$ wählt) diesen ersten Summanden an. Man führt den Zylinder in seine Anfangsstellung zurück, stellt den zweiten Summanden y_2 ein, dann gibt die Umdrehungszahl des Zylinders, wenn man ihn wieder über das Rad in seiner ganzen Länge geführt hat, $y_1 + y_2$ usf. Wird die Verschiebung des Zylinders $x_2 - x_1$ einer Zahl proportional, so liefert das Hamannsche Instrument auch Produkte $y(x_2 - x_1)$ zweier gegebenen Zahlen.

25. Multiplikation und Division. Die folgenden Konstruktionen sind sämtlich von Prof. Hele-Shaw in London angegeben worden. Eine Kugel vom Halbmesser r sei um eine horizontale Achse KK drehbar und zwei Rollen A und B sollen sie in dem größten Kugelkreise berühren, der horizontal liegt. Sie sind durch einen Rahmen, den wir als den festen Rahmen bezeichnen wollen, so mit einander verbunden, daß ihre Ebenen senkrecht zu einander stehen und durch den Mittelpunkt O der Kugel gehen. Auf der horizontalen Achse der Rolle A soll ein Schieber P verschiebbar sein, der durch einen andern Rahmen, den wir den beweglichen nennen, so mit der Drehachse KK der Kugel in Verbindung steht, daß die Richtung OP stets senkrecht zu KK ist. Ist dann der Winkel $OPA = 90^0 - \alpha$ und wird die Entfernung $PA = a$, $OA = k$ gesetzt, so ist $a = k \operatorname{tg} \alpha$. Dreht sich die Kugel um KK und ist φ der Drehungswinkel, so wickelt die Rolle A, deren Berührungspunkt sich auf dem kleinen Kugelkreise mit dem Halbmesser $r \cos \alpha$ bewegt, den Bogen $\sigma_1 = r \cos \alpha d\varphi$ ab, während die Rolle B den Bogen $\sigma_2 = r \sin \alpha d\varphi$ abwickelt. Es ist also $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \operatorname{tg} \alpha$ und daher $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{a}{k}$, wo k konstant ist. Wenn man nun eine Entfernung

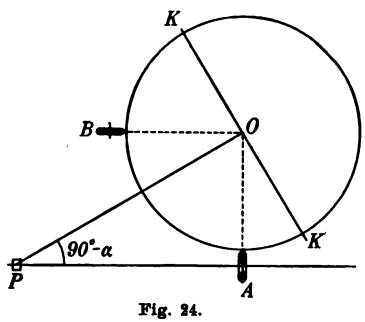


Fig. 24.

a mit Hilfe einer Skala einstellt, indem man P auf der Achse von A verschiebt, und die Rolle A, die ebenfalls mit einer Teilung versehen ist, von null ausgehend bis zu einer Ablesung ω_1 dreht, so wird dadurch die Kugel und damit auch die Rolle B in Drehung versetzt. Die Ablesung ω_2 der Rolle B ist dann $\omega_2 = \frac{a}{k} \cdot \omega_1 \cdot \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ wenn $\sigma_1 = \varrho_1 \omega_1$, $\sigma_2 = \varrho_2 \omega_2$ ist. Durch passende Wahl der Einheit $\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = k\right)$ oder der Rollendurchmesser erhält man also $\omega_2 = a \cdot \omega_1$ als Produkt der eingestellten Zahlen.

Besonders vorteilhaft ist diese Vorrichtung, wenn man a konstant läßt, indem man dann eine Tabelle der Produkte von a mit verschiedenen Faktoren erhält.

Dreht man dagegen die Rolle B, so wird die Kugel ebenfalls um ihre Achse gedreht und damit auch A und man erhält $\left(\text{wieder für } \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = k\right)$ $\omega_1 = \frac{\omega_2}{a}$ als Quotienten zweier eingestellten Zahlen.

26. Quadratwurzelziehung. Wir nehmen jetzt an, daß die Achse der Rolle A eine Schraube und P eine Schraubenmutter sei. Durch Drehung der Rolle A, die durch den festen Rahmen in ihrer Stellung gehalten wird, wird die Schraube gedreht und dadurch die Schraubenmutter P verschoben, die in dem beweglichen Rahmen befestigt an der Drehung nicht teilnehmen kann. Dadurch wird ferner die in dem beweglichen Rahmen sitzende Drehachse der Kugel in ihrer Lage verändert. Es seien wieder ϱ_1 und ϱ_2 die Halbmesser der Rollen A und B, $d\omega_1$ und $d\omega_2$ ihre Drehungswinkel, ferner t die Ganghöhe der Schraube, also auch die Änderung der Entfernung a, die einer Schraubenumdrehung entspricht. Dann ist $\frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{a}{t}$, wenn $\omega_1 = 0$ für $a = 0$ ist. Setzt man den Wert von a in $\frac{\varrho_2 \, d\omega_2}{\varrho_1 \, d\omega_1} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{k}$ ein, so folgt

$$d\omega_2 = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{t}{2\pi k} \omega_1 \, d\omega_1$$

und durch Integration, wenn für $\omega_1 = 0$ auch $\omega_2 = 0$ ist, $\omega_2 = \frac{t}{4\pi k} \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \omega_1^2$. Wählt man $\sqrt{\frac{t}{4\pi k} \frac{\varrho_1}{\varrho_2}} = 1$, so folgt $\omega_1 = \sqrt{\omega_2}$ d. h. wenn man die Rolle B um eine Zahl ω_2 dreht, wodurch die

Kugel und die Rolle A ebenfalls in Drehung versetzt werden, so liest man an der Rolle A die Quadratwurzel $\sqrt{\omega_2}$ ab.

27. Logarithmierung. Bringt man dagegen bei sonst unveränderten Verhältnissen P in der Verlängerung der Drehachse der Kugel an (Fig. 25), so möge wiederum der Winkel zwischen dieser Drehachse und der Schraubenachse $APO = \alpha$ bezeichnet werden. In diesem Falle ist $\operatorname{tg}\alpha = \frac{k}{a}$, also auch $\frac{d\sigma_2}{d\sigma_1} = \frac{\varrho_2\, d\omega_2}{\varrho_1\, d\omega_1} = \frac{k}{a}$. Setzt man wieder $a = \frac{t\omega_1}{2\pi}$ ein, so erhält man $d\omega_2 = 2\pi \frac{k}{t} \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{d\omega_1}{\omega_1}$, also durch Integration

$$\omega_2 = 2\pi \frac{k}{t} \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \lg \omega_1,$$

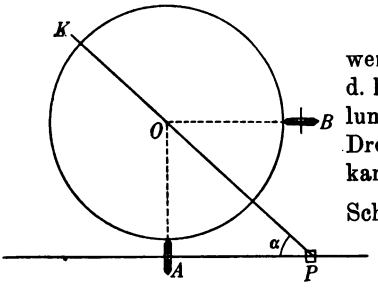


Fig. 25.

wenn die Integrationskonstante null ist, d. h. der Einstellung $\omega_2 = 0$ die Einstellung $\omega_1 = 1$ entspricht, was man durch Drehung der Rollen erreichen kann. Hier kann man durch passende Wahl der Schraubenganghöhe $2\pi \frac{k}{t} \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ = Modulus der dekadischen Logarithmen machen. Dann wird

$$\omega_2 = \log \omega_1.$$

Durch Drehung der Rolle A um ω_1 erhält man $\log \omega_1$ als Ablesung der Rolle B.

28. Trigonometrische und hyperbolische Funktionen. Von dem Erfinder Ch. Hamann des unter **24.** beschriebenen Proportionalrechenschiebers ist ein arithmetischer und trigonometrischer Universalrechenapparat konstruiert worden, der sich in der Konstruktion an den genannten anschließt.[1]) Auf einem quadratischen Metallrahmen von 17 cm Seitenlänge (s. Fig. 26) dreht sich ein Arm, den wir mit A bezeichnen wollen um einen Punkt D in der rechten oberen Rahmenecke. Wenn er der oberen Rahmenkante parallel liegt, zeigt ein an ihm befestigter Nonius auf den Nullpunkt eines bis 45^0 reichenden Gradbogens (II).[2]) Ein zweiter Nonius wird ebenfalls

1) Zeitschrift für Instrumentenkunde **31**, 101, 1911. (Beschreibung von Ingenieur K. Hoecken.)

2) Die Bezeichnung der fünf Ablesevorrichtungen ist durch die Zahlen I bis V von links nach rechts vorgenommen, entsprechend die der Ablesungen a_1 bis a_5.

von ihm längs der linken Rahmenkante mitgeführt und zeigt in der genannten Anfangsstellung auf den Nullpunkt einer geradlinigen Skala (I) an dieser Rahmenkante. An der rechten Rahmenkante befindet sich eine mit I völlig übereinstimmende Skala (V), die aber verschiebbar ist und mittels eines am Rahmen fest angebrachten Nonius abgelesen wird. Mit dieser Skala (V) ist ein um seine Achse drehbarer Zylinder (IV) so verbunden, daß er sich gleichzeitig mit V in

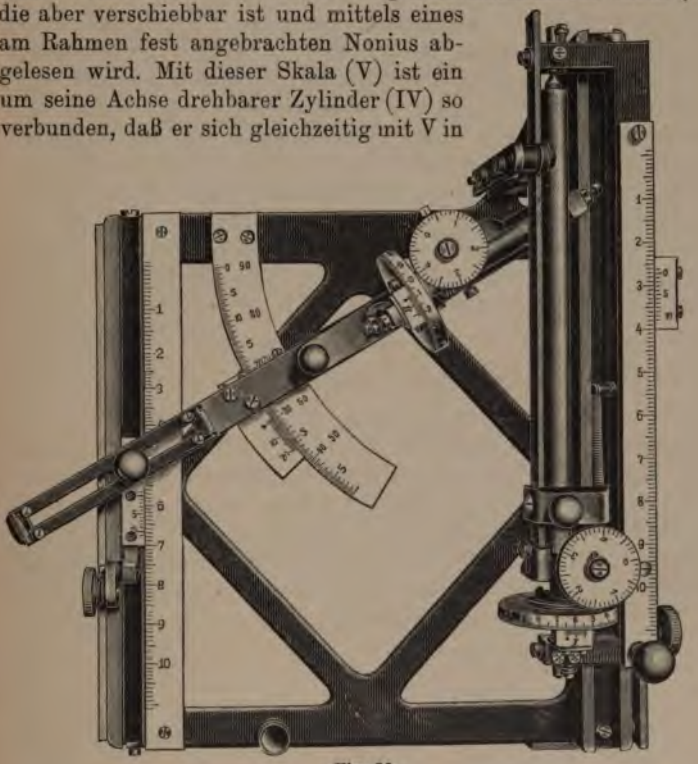


Fig. 26.

seiner Längsrichtung verschieben läßt. Nun ist auf dem Arme A nahe seinem Drehpunkt D ebenfalls ein Zylinder (III) gelagert, und es kann durch den Druck auf einen an der unteren Rahmenkante angebrachten Knopf bewirkt werden, daß (durch seitliche Kippung des Rahmens des Zylinders IV) die beiden Zylinder III und IV einander in einem in der Richtung des Armes A gegebenen Punkte berühren. Wird der Knopf losgelassen, so sind die Zylinder wieder außer Berührung. Die Drehung der Zylinder wird an zwei

Zählwerken abgelesen, welche die ganzen Umdrehungen und ihre Bruchteile angeben.

Bezeichnet man den am Gradbogen abgelesenen Winkel mit α, so ist der Winkel der beiden Zylinderachsen $90^0 - \alpha$. Wird nun der Zylinder IV um den an der Skala V abzulesenden Betrag a_5 in der Richtung seiner Achse verschoben, so erleidet er durch die Berührung mit dem Zylinder III eine an seinem Zählwerk meßbare Drehung a_4. Hierbei wird auch der Zylinder III eine an der Zählscheibe sichtbare Drehung a_3 erleiden. Eine Drehung des Zylinders III kann man als Resultante einer Längsverschiebung und Drehung des Zylinders IV auffassen, so daß bei konstantem Winkel α auch für endliche Drehungen $a_4 = a_3 \sin\alpha$, $a_5 = a_3 \cos\alpha$ ist. Wenn ferner die Rahmenseite (genauer die Entfernung des Drehpunktes D von Skala I) als Einheit genommen wird, so ist die Ablesung a_1 an Skala I: $a_1 = \operatorname{tg}\alpha$.

Hieraus geht hervor, daß sich der Apparat zur Multiplikation und Division verwenden läßt, indem $a_4 = a_1 a_5$, $a_5 = \frac{a_4}{a_1}$ ist, wenn man bei Herstellung der Berührung der Zylinder III und IV mit dem Druckknopf die Faktoren a_1 und a_5 auf den Skalen I und V bzw. den Dividenden am Zählwerk des Zylinders IV einstellt. Wenn man die Zählwerke, die durch eine besondere Vorrichtung auf Null gestellt werden können, eingestellt läßt, so kann man ein anderes Produkt zu einem vorhergehenden addieren usf., also was mit dem Rechenschieber nicht möglich ist, Ausdrücke von der Form $ab \pm cd \pm ef \ldots$ bilden.

Die sechs Gleichungen:

$$a_5 = a_3 \cos\alpha \qquad a_4 = a_3 \sin\alpha$$
$$a_3 = a_4 \operatorname{cosec}\alpha \qquad a_3 = a_5 \sec\alpha$$
$$a_4 = a_5 \operatorname{tg}\alpha \qquad a_5 = a_4 \operatorname{ctg}\alpha$$

zeigen die Möglichkeit, die Produkte einer trigonometrischen Funktion und einer Zahl zu bilden, wenn noch $\sin(45^0 \pm \alpha) = \cos(45^0 \mp \alpha)$ in Betracht gezogen wird.

Wenn außerdem die Winkeldrehung des Armes A durch die Längsverschiebung des Systems IV, V mittelst einer besonderen Vorrichtung hergestellt wird, so besteht für kleine Bewegungen die Differentialformel

$$da_5 = \cos\alpha\, da_3.^{1})$$

Da nun $da_5 = d\alpha$ durch passende Einrichtung der Übertragung gemacht werden kann, so folgt

$$da_3 = \frac{d\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{und} \quad a_3 = \int \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right),$$

und damit erhält man die hyperbolischen Funktionen

$$\sin\alpha = \mathfrak{Tang}\, a_3, \quad \sec\alpha = \mathfrak{Cof}\, a_3, \quad \operatorname{tg}\alpha = \mathfrak{Sin}\, a_3.$$

Wenn man daher bei gekuppelten Zylinderwalzen die Skala V so lange verschiebt, bis die Ablesung a_3 an dem Zählwerk des Zylinders III erscheint, so hat sich der Arm A von selbst auf α eingestellt. Man kann dann auf die frühere Weise das Produkt einer Zahl mit $\sin\alpha$ usw., also auch das Produkt einer Zahl mit $\mathfrak{Tang}\, a_3$ usf. durch den Apparat erhalten, also ebenso wie beim ungekuppelten System.

V. Abschnitt.

Differentiatoren.

29. Zweck. Um den Wert des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ zu erhalten, also wenn $y = f(x)$ durch eine Kurve dargestellt betrachtet wird, die Richtung der Tangente, wird bei den Apparaten von Hele-Shaw das Verhältnis der Geschwindigkeiten $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dx}{dt}$ eingeführt und diese werden in Rotationsgeschwindigkeiten ω_2 und ω_1 verwandelt. In dem besonderen Falle, daß $x = t$, d. h. die eine Veränderliche die Zeit und daher $\omega_1 = \frac{dx}{dt}$ eine Konstante $(= 1)$ ist, erhält man dann direkt die Geschwindigkeit $\frac{dy}{dt} = \omega_2$.

30. Rollen- und Scheibenmechanismus. Eine Rolle R (Figur 27) möge in der Weise auf einer rotierenden Kreisscheibe S angebracht sein, daß ihr Berührungspunkt sich längs eines Durchmessers der ruhenden Scheibe verschiebt. Diese Verschiebung findet auf einer Schraubenspindel E statt, die als Achse der Rolle dient. Die Schraube werde in eine Drehgeschwindigkeit ω_2 versetzt, die von der

1) Für das gekuppelte System ist genauer $da_5 = \cos(\alpha + d\alpha)\, da_3$, wofür $(\cos\alpha - \sin\alpha\, d\alpha)\, da_3$ oder mit Vernachlässigung des Gliedes zweiter Ordnung $\cos\alpha\, da_3$ geschrieben werden kann.

einen Veränderlichen y abhängt, während die Winkelgeschwindigkeit ω_1 der Scheibe von der anderen Veränderlichen x abhängen soll. Da nun die Rolle, die wie eine Schraubenmutter auf der Spindel aufsitzt, durch die rotierende Scheibe die Geschwindigkeit $e\omega_1$ empfängt, wenn e der Abstand des Berührungspunktes vom Scheibenmittelpunkt ist, so muß sie sich auf der Schraubenspindel, welche eine andere Winkelgeschwindigkeit besitzt, so lange verschieben, bis beide Geschwindigkeiten gleich sind. Ist etwa die Drehgeschwindigkeit der Schraube kleiner, so wird sich die Rolle nach dem Mittelpunkt der Scheibe hin verschieben. Wenn mit ϱ der Halbmesser der Rolle bezeichnet wird, so wird ein Ruhezustand eintreten, wenn $\varrho\omega_2 = e\omega_1$ ist. Daher ist $e = \varrho\frac{\omega_2}{\omega_1}$ ein Maß für

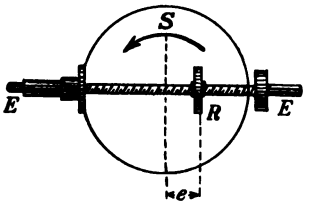


Fig. 27.

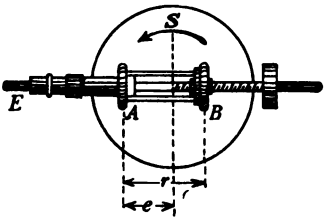


Fig. 28.

das Verhältnis beider Geschwindigkeiten, da ja ϱ eine Konstante ist. Da im allgemeinen die Geschwindigkeiten sich fortwährend ändern, so ist die augenblickliche Ablesung der Entfernung der Rolle vom Scheibenmittelpunkt das Verhältnis der gleichzeitig stattfindenden Geschwindigkeiten. Im Falle $\omega_1 = 1$ ist $e = \varrho\omega_2$ das Maß für die Geschwindigkeit der Schraubendrehung, die dann erhalten wird, wenn die Scheibe durch ein Uhrwerk in gleichförmige Umdrehung versetzt wird.

Die beschriebene Einrichtung wird besonders dann ungünstig, wenn ω_1 kleine Werte annimmt, also e sehr groß wird und die Rolle über den Rand der Scheibe sich entfernen würde. Diesem Übelstand hilft eine Veränderung (Figur 28) ab, die in der Anwendung zweier gleich großer Rollen A und B besteht, die zwar auf derselben Achse sitzen und die konstante Entfernung r des Halbmessers der Scheibe haben, aber sich unabhängig voneinander drehen. Erteilt man der Rolle A mit dem Radius ϱ die Geschwindigkeit ω_1, so wird die Scheibe dadurch in eine Winkelgeschwindigkeit φ versetzt, die sich bei einem Abstand e der Rolle vom Mittelpunkte durch $e\varphi = \varrho\omega_1$

bestimmt. Die Rolle B, die den Abstand $r - e$ vom Mittelpunkte der Scheibe besitzt, wird dadurch die Geschwindigkeit $\varrho\omega_2 = (r-e)\varphi$ erhalten. Wenn aber die ihr erteilte Geschwindigkeit ω_2' nicht mit ω_2 übereinstimmt, so wird eine Verschiebung der beiden Rollen, deren Abstand unveränderlich ist, so lange stattfinden, bis die Gleichheit $\omega_2 = \omega_2'$ erreicht ist. Dann ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r-e}{e}.$$

31. Rollen- und Kugelmechanismus. Derselbe Gedanke liegt einem anderen Apparate zugrunde (Figur 29). Eine schräggestellte Scheibe S wird durch Vermittlung eines Zahnrades A mit

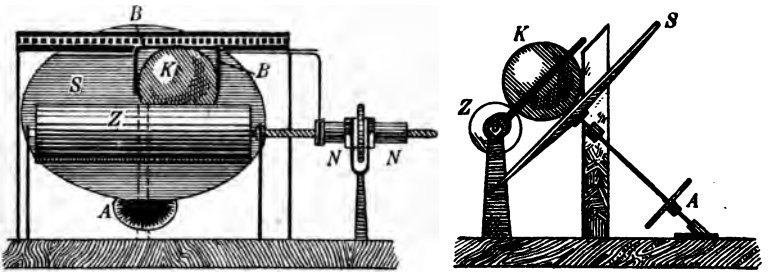


Fig. 29.

der Geschwindigkeit $\omega_1 = \frac{dx}{dt}$ in Drehung versetzt. Längs eines horizontalen Durchmessers der Scheibe rollt eine Kugel K, die an dem Herabgleiten durch einen Zylinder Z mit ebenfalls horizontaler Achse gehindert wird. Die Kugel berührt daher den ruhenden Zylinder längs einer Mantellinie, wenn sie sich längs des Durchmessers der Scheibe bewegt, während der Zylinder und die Scheibe nicht in Berührung stehen. Die seitliche Verschiebung der Kugel wird durch einen gabelförmig sie umfassenden Bügel B geleitet, der an einer Schraubenmutter N befestigt ist, die ohne sich zu drehen auf einer Schraubenspindel, welche die Verlängerung der Zylinderachse bildet, sich verschiebt. Die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Schraubenspindel und damit der Zylinder dreht, sei $\omega_2 = \frac{dy}{dt}$. Da nun die rotierende Scheibe der Kugel eine Drehgeschwindigkeit mitteilt, die vom Abstande des Berührungspunktes vom Scheibenmittelpunkt abhängt, und andererseits der Zylinder eine andere Drehgeschwindigkeit besitzt, so entsteht eine

Verschiebung der Kugel, die so lange vorhält, bis beide Geschwindigkeiten, die der Kugel erteilt werden, gleich sind. Ein Zeiger, welcher an dem die Kugel umfassenden Bügel sich befindet, gestattet an einer Skala die Entfernung der Kugel vom Mittelpunkte abzulesen, die also das Verhältnis beider Geschwindigkeiten angibt.

Bereits im vorigen Abschnitt haben wir die Einrichtung erwähnt, bei der zwei rechtwinklig gegeneinander gerichtete Rollen auf derselben Kugel sich drehen und eine auf der Achse einer dieser Rollen verschiebbare Schraubenmutter mit der Kugelachse in Verbindung steht. Im Verfolg dieses Gedankens hat Hele-Shaw gezeigt, wie man auf diese Weise ebenfalls das Verhältnis der Geschwindigkeiten beider Rollen (nämlich $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \operatorname{tg} \alpha$, s. S. 54) bestimmen und durch Anwendung von zwei Kugeln auch den zweiten Differentialquotienten, also die Beschleunigung erhalten kann. (Vgl. Philosophical Transactions vol. 176, Part. II, p. 367—402, London 1886.)

VI. Abschnitt.

Kurvenmesser.

(Kurvimeter, Kurvometer, Kurveometer, Opisometer, Rektifizierrädchen, Meßrädchen, Longimeter, Linienmesser, Kartometer usw.)

32. Bei den folgenden Instrumenten wird die Summation von Größen, die graphisch gegeben sind, nach dem Verfahren der Integration ausgeführt. Die Integration bezieht sich entweder auf diese Größen selbst oder auf Funktionen derselben. Einer der einfachsten Fälle betrifft die Summierung der Bogenelemente einer Kurve oder der Bestimmung ihrer Bogenlänge. Da diese zwischen gegebenen Punkten gesucht wird, so vollzieht das Instrument eine Integration zwischen festen Grenzen, liefert also ein bestimmtes Integral. Der Einfachheit halber lassen wir die Bezeichnung der Grenzen der bestimmten Integrale in den folgenden Abschnitten fort.

Um die Bogenlängen einer Kurve zu messen, sind zwei Verfahren in Gebrauch. Das eine bedient sich einfach des Zirkels, mit dessen Hilfe Tangenten- oder Sehnenabschnitte gemessen und durch eine besondere Vorrichtung am Zirkel addiert werden. Die zweckmäßigste Zirkelöffnung richtet sich bei dieser Methode, die sich vorzugsweise auf Kurven von allmählicher Krümmungsänderung beschränkt, nach der Größe des Krümmungsradius.

Die andere Methode der Rektifikation benützt als besonderes Instrument ein Meßrädchen, das gewöhnlich von der Hand geführt nach Augenmaß die Richtung der Tangente einhält und an einer Ablesevorrichtung für die Anzahl der Umdrehungen die Länge der Kurve bis auf einen vom Radius des Rädchens abhängigen Faktor in einem gewünschten Maße angibt. Dieses Verfahren ist also im Grunde dasselbe, welches der französische Arzt Fernel (1525) zum Zwecke einer Meridianmessung von Paris bis Amiens anwandte, als er die Umdrehungen seines Wagenrades zählte. Da wir einem solchen Meßrädchen bei verschiedenen Integrierinstrumenten begegnen werden, so führen wir ϱ als Bezeichnung des Radius, ω als Bezeichnung des Winkels, den ein bestimmter Radius von einer Anfangslage ausgehend beschreibt, und σ als Weg eines Punktes des Umfanges bei Drehung des Rades ein. Wenn das Rad mit einem hinreichenden Druck auf der Unterlage eine elementare Wegstrecke ds durchläuft, so wird der von einem Punkte des Umfanges zurückgelegte Bogen $d\sigma = \varrho d\omega$ und $d\sigma = ds$ sein. Bei Kurven muß die Ebene des Rades fortwährend ihre Richtung ändern. Bei wechselnder Größe des Krümmungsradius der Kurve ist die Größe des Radius ϱ bald günstiger, bald ungünstiger. Durch Versuche ist festgestellt worden, daß der Krümmungshalbmesser nicht wesentlich unter den Radhalbmesser herabsinken darf, wenn das Rädchen mit Erfolg benützt werden soll.

Das Kurveometer von Wittmann in Wien hat etwa 8 mm Durchmesser, das Rektifizierrädchen von Platzbecker[1]) in Düsseldorf etwa 6,5 mm. Bei der Befahrung einer geradlinigen Strecke wächst der unregelmäßige Fehler nahezu wie die Quadratwurzel der Länge, bei anderer Gestalt des Weges ist er natürlich größer. Hammer erhielt z. B. mit letzterem Instrumente bei einer geraden Wegstrecke von 500 mm einen unregelmäßigen Fehler $\pm$ 0,5 mm, bei einem ungefähr gleichlangen willkürlich geformten Kurvenzug $\pm$ 0,9 mm als mittleren Fehler, wobei kein Krümmungsradius unter 10 mm vorkam. Erwähnt sei noch, daß bei dem Instrumente von E. Krauß in Mailand mit 4 mm Durchmesser das Zählwerk stets in derselben Richtung fortschreitet, auch wenn das Rädchen seinen Drehungssinn wechselt.[2])

1) Bei diesem Apparat wird besonders die Registriervorrichtung für Zählung der Radumdrehungen gerühmt.

2) Andere Instrumente, die auf demselben Prinzip beruhen, sind

Ein Linienmesser (Kurvometer) von G. Coradi in Zürich (Figur 30) ist mit 2 Rollen versehen, deren Achsen in derselben Richtung liegen und die unterhalb einer Platte mit 4 kreisförmigen Öffnungen angebracht sind. In zwei dieser Ausschnitte sind die Registrierscheiben der beiden Rollen zz' sichtbar. Genau in der Mitte zwischen den Auflagepunkten der beiden Rollenränder befindet sich der Führungspunkt, der längs der auszumessenden Linie verschoben wird, wobei die Richtung der Rollenachsen senkrecht zur augenblicklichen Tangente gestellt wird. Als Führungspunkt wird der Nullpunkt einer kleinen im mittleren Ausschnitte sichtbaren Skala C

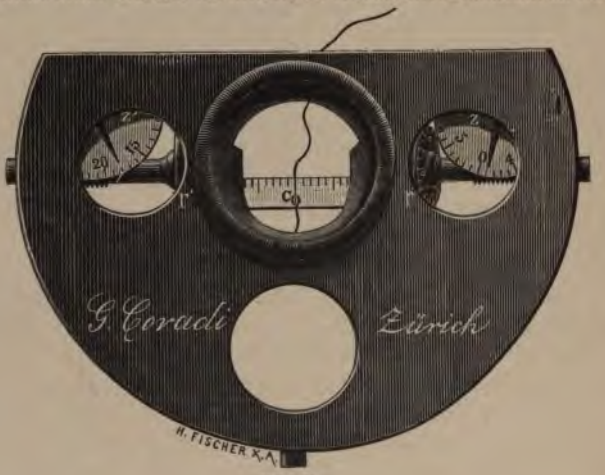


Fig. 30.

benutzt. Die Bezifferung der beiden Registrierscheiben wächst im gleichen Sinne, so daß bei einer Drehung des Instrumentes um den Berührungspunkt die Summe der Ablesungen Null ist. Die Teilung ist so gewählt, daß die Summe der Ablesungen den zurückgelegten Weg angibt, wobei ein Teil einem Millimeter entspricht Der vierte Ausschnitt dient zum Anfassen des Instrumentchens. Die Genauigkeit wird vom Verfertiger auf $^1/_{2000}$ angegeben. Bei einer Abweichung um 8^0 von der senkrechten Stellung der Skalenrichtung oder der Rollenachse zum Kurvenelement wird die Weglänge um $^1/_{100}$ unrichtig (entsprechend $\cos 8^0 = 0{,}99$).

von Schlagintweit, Jacob, Sandor, Mayer und Wolf in Fiume usf. konstruiert worden.

Ein Kurvenmesser von Ott in Kempten[1]) beruht in Kürze auf Folgendem: Ein Fahrstift trägt am unteren Ende einen Ring mit eingespanntem Hornblättchen, das zwei sich senkrecht kreuzende Linien enthält, deren eine in die Richtung der Kurventangente gedreht wird. Am oberen Ende desselben Stiftes sitzt die Rolle, die durch Gegengewichte angedrückt auf der Unterseite eines darüber liegenden horizontalen Glasdaches rollt, das noch zur Vermeidung eines Gleitens der Rolle mit Papier überzogen werden kann. Das Instrument wurde von Hammer auch bei starken Krümmungen, bis zu 0,8 mm Krümmungshalbmesser hinab, benutzt und gab bei Kurvenlängen von 120 bis 140 mm als mittleren Fehler $\pm$ 0,2 bis 0,3 mm für eine einzelne Durchfahrung. Andere haben in der fortwährenden Drehung des Stiftes einen Übelstand gesehen.

Fig. 31.

Dieser Schwierigkeit begegnet das vom Ingenieur Fleischhauer in Gotha erfundene Kartometer (Konstrukteur Tesdorpf). Hier (Figur 31) befindet sich in der Mitte einer ringartigen Platte der Fahrstift, der durch zwei Führungsstangen regiert und auf der Kurve entlang geführt wird. Gleichmäßig über den Umfang des Ringes sind eine ungerade Anzahl (3 in der Figur, auch 5 oder 7) Räder, deren Ebenen radial stehen, verteilt; die Räder, die sich infolge einer Sperrvorrichtung, die sich aber nicht bewähren soll, nur nach außen drehen können, sind mit Zifferblättern versehen, an denen die Umdrehungen und ihre Bruchteile abgelesen werden. Man bestimmt durch Umfahrung einer Kurve von genau bekannter

1) Abbildung Zeitschr. f. Verm. 18, 1889, S. 132.

Länge, also etwa eines Kreisumfanges, die Konstante k, mit welcher die Summe der Ablesungsdifferenzen der Räder multipliziert werden muß und befährt die zu untersuchende Kurve zweimal, indem man jedesmal die Führungsstangen in derselben Richtung hält, beim zweiten Male aber senkrecht zu ihrer ersten Richtung stellt.

VII. Abschnitt.

Flächenmesser.

(Instrumente zur Flächenbestimmung, Planimeter.)

33. Flächentafeln. Alle Instrumente, welche zur Ausmessung zweidimensionaler Größen dienen, verfolgen den Zweck, das Resultat durch eine einzige Zahl zu geben.

In der allereinfachsten, trotzdem aber für viele Zwecke durchaus geeigneten Weise wird dies durch die Quadratmillimeterglastafel erreicht, die auf die auszumessende Fläche gelegt wird. Die Anzahl der auf die Fläche fallenden Quadrate gibt unmittelbar den Inhalt an, während die an den Grenzen nur teilweise die Fläche deckenden Quadrate schätzungsweise addiert werden. Die Genauigkeit bewegt sich nach Lüdemann zwischen 0,05 und 0,1 %.

Etwas bequemer wird das Resultat mit einer Hyperbelglastafel[1]) von Kloth in Osnabrück erhalten, bei der aber mehrere Verschiebungen nötig sind und einfachere Gestalten der Flächenstücke vorausgesetzt werden.

34. Harfenplanimeter und ähnliche. In demselben Zu-

1) Kloth stellte sich die Aufgabe, den geometrischen Ort der Schnittpunkte der stetig veränderlichen Koordinaten zu konstruieren, welche mit den rechtwinkligen Achsen ein Rechteck von konstanter Größe einschließen. $xy = F$ ist nun die Asymptotengleichung einer Hyperbel, und es sind auf der Glastafel für äquidistante Werte von F die Hyperbeln ausgezogen. Bei einem Dreieck legt man die Grundlinie in die y-Achse, verschiebt dann die Tafel, bis die Spitze des Dreiecks mit der x-Achse zusammenfällt und liest am Endpunkt der Grundlinie den Wert F ab, der die doppelte Dreiecksfläche gibt. Ein Viereck zerlegt man durch eine Diagonale in 2 Dreiecke usf. Man kann auch die Eigenschaft der Hyperbeltangenten, daß sie Dreiecke von konstantem Flächeninhalt mit den Koordinatenachsen einschließen zu einer veränderten Ablesung benutzen, (vgl. Zeitschr. f. Verm. 32, 369, 1903).

sammenhange[1]) ist das Harfenplanimeter von Oldendorp zu nennen. Es besteht in seiner ursprünglichen Gestalt aus parallelen, in einem rechteckigen Rahmen, in kleinen konstanten Abständen aufgespannten Fäden. In der Flächenformel $F = \Sigma y \Delta x$ werden die y als die mittleren Längen der Flächenstücke zwischen je zwei im Abstande Δx aufgespannten Fäden angesehen. Werden die Längen y mit einem Zirkel (Planimeterzirkel, Planimeterhaarzirkel) gemessen, so ist es vorteilhaft, an diesem eine Additionsvorrichtung anzubringen (Zirkeladdition).

Da die Fäden nicht straff gespannt bleiben, ersetzt man sie durch eingeteiltes Ölpapier, das wiederum infolge nicht genügender Durchsichtigkeit die Konturen der Pläne nicht deutlich erkennen läßt. Deshalb wurde von Mönkemöller ein Planimeter[2]), das auf demselben Prinzip beruht, in folgender Weise konstruiert. Es besteht im wesentlichen aus einem viereckigen, eisernen Rahmen, in welchem eine Glasskala an einer Leitstange entlang verschoben werden kann. Die auszumessende Figur wird durch Teilstriche der Glasplatte in Parallelstreifen zerlegt, deren Breite konstant ist, und deren Längen durch die Verschiebung der Glasskala gemessen werden, die an einer Rolle abgelesen wird. Die Anwendung der Harfenplanimeter ist besonders bei langgestreckten Figuren empfehlenswert, die Genauigkeit des Mönkemöllerschen wird nach Untersuchungen von Hamann[3]) derjenigen der später zu erwähnenden Präzisionsplanimeter gleichgestellt. Beim Gebrauch muß darauf geachtet werden, daß nicht Flächenstreifen ausgelassen oder doppelt gemessen werden.

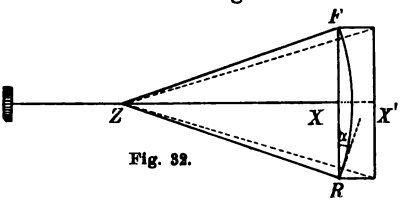


Fig. 32.

Auf wesentlich demselben Prinzipe beruht das von F. Günther angegebene Äquidistanzplanimeter, welches zur Ausmessung von Detailfiguren (im Maßstabe 1 : 4000) konstruiert wurde. In der Hauptsache besteht es aus einer langen Schraube, deren Muttergewinde in einem auf einer festen Platte drehbaren Block eingelassen ist. An dem Ende, das dem

1) Ein ähnliches Hilfsmittel ist auch der Flächenmesser von Semmler, Zeitschr. f. Verm. **35**, 1906, 386, der aus einer fünfeckigen Glastafel mit aufgezeichneten Teilstrichen besteht.

2) Zeitschr. f. Instrk. **15**, 456, 1895.

3) Zeitschr. f. Verm. **28**, 549, 1899.

Schraubengriff entgegengesetzt ist, befindet sich eine bewegliche Hülse, die zwei Arme trägt; der eine Arm trägt den Fahrstift, der andere die Zählrolle, die beide im gleichen Abstande von der Schraubenachse auf verschiedenen Seiten derselben einander gegenüberstehen. Setzt man den Fahrstift auf den dem Instrument nächsten Punkt des unteren Randes der auszumessenden Figur und dreht man den Schraubenarm um seinen Drehpunkt, so beschreibt der Fahrstift einen flachen Kreisbogen bis zum oberen Rand der Figur, wobei die Rolle sich abwälzt. Jetzt schraubt man die Schraube um ein bestimmtes Stück (eine Viertelumdrehung) vorwärts und bringt den Fahrstift wieder an den unteren Rand der Figur. Hierbei wird durch eine Vorrichtung, die auch die Drehung der Schraube auf eine Vierteldrehung beschränkt, gleichzeitig die Rolle verhindert, sich zu drehen. Nun beschreibt der Fahrstift wieder einen Kreisbogen bis zum oberen Rande usf. und die Figur wird in eine Anzahl von Kreisringsektoren zerlegt.

Es sei (Fig. 32) Z der Drehpunkt der Schraubenachse ZX, F der Fahrstift, R die Rolle, deren Mittelebene immer senkrecht zur Schraubenachse steht, dann beschreibt, wenn F einen Kreisbogen mit dem Radius FZ beschreibt, R einen kongruenten Kreisbogen und auch X beschreibt einen Kreisbogen. Denn es ist $FX = XR$ und FR senkrecht zu XZ, nach Konstruktion des Instrumentes, also $FZ = ZR$. Die Ebene der Rolle bildet nun mit der Tangente des Kreises einen kleinen Winkel α, daher wickelt sie (S. 49) nicht den Bogen Δs des Kreises ab, sondern $\Delta u = \Delta s \cdot \cos\alpha$. Durch die Drehung der Schraube erhält nun ZX einen Zuwachs $XX' = \Delta x$. Dadurch wird der Radius des Kreises, den der Fahrstift und der Rollenauflagepunkt beschreiben, um $\Delta r = \Delta x \cdot \cos\alpha$ vergrößert. Die Fläche eines Kreisringes beträgt daher

$$\Delta s \cdot \Delta r = \Delta u \sec\alpha \cdot \Delta x \cos\alpha = \Delta u \cdot \Delta x.$$

Durch passende Wahl der Ganghöhe der Schraube und geeignete Bezifferung der Rolle kann man, da Δx eine Konstante ist, die Ablesung des Flächeninhalts unmittelbar an der Rolle erhalten.

Ein einfaches Hilfsmittel bietet der Planimeterschieber von R. A. de Wal[1]), der die Größe (27 cm) und Form eines gewöhnlichen Rechenschiebers (z. B. von Frank) besitzt. Er trägt

1) Zeitschr. f. Vermessungsw. **39**, 111, 1910. Zeitschr. f. Instrumentenk. **31**, 29, 1911.

aber zwei gewöhnliche Teilungen von 25 cm Länge (den Maßstäben eines Planes in 1 : 2500 und 1 : 1000 entsprechend). Die Zunge trägt dieselben Teilungen, aber in entgegengesetzter Richtung laufend und nur mit Auszeichnung einiger Hauptstriche. Der Läufer ragt mit einer Glasplatte über den Stab hervor und trägt auf dieser und zwar senkrecht zu den Teilungen einen Indexstrich.

Legt man nun eine Harfe auf die auszumessende Figur, so kann man mit dem Schiebermaßstab, den man den Mittellinien der dadurch in parallele Streifen geteilten Figur parallel legt, die Streifen- (Mittellinien-)längen abmessen und additiv aneinandersetzen. Wenn die Länge des Maßstabes nicht mehr ausreicht, schiebt man die Zunge zum nächsten Strich und beginnt die Messung von einem Zungenstrich am linken Ende des Maßstabes ausgehend. Als besonders vorteilhaft erscheint (nach Hammer) die größere Genauigkeit bei der Ausgleichung unregelmäßiger Streifenenden bei Anwendung des Indexstriches als durch Augenmaß.

35. Verwandlungsplanimeter. Für die Inhaltsberechnung geradlinig begrenzter Figuren (Polygone) kommen die Verwandlungsplanimeter in Betracht, wie sie Hofmann und Gangloff und Schlesinger konstruiert haben. Sie beruhen auf dem Prinzip des Parallelabschiebens zum Zwecke der Verwandlung des Polygons in ein flächengleiches Dreieck.[1])

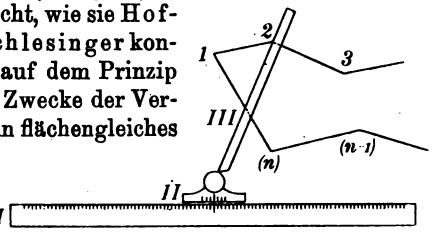


Fig. 33.

Ein Lineal I aus Messing (Figur 33) besitzt längs einer Kante eine Einteilung mit dem Nullpunkt in der Mitte. Ein kürzeres Lineal II läßt sich längs der geteilten Kante von I verschieben und hat eine Marke oder Noniusteilung, um die Größe der Verschiebung messen zu können. An seiner anderen Längsseite ist ein drittes Lineal III durch ein Scharnier angebracht, um das es sich drehen kann. Die eine abgeschrägte Seite von III geht verlängert genau durch die Mitte des Scharniers und trägt eine Marke. Mit dieser wird es an einen Punkt (1) des Polygons angelegt, dann wird das Lineal I senkrecht zu III an II so gelegt, daß die Nullpunkte der Teilungen zusammenfallen und in dieser Lage mit zwei Nadeln fixiert. Das Verfahren

1) Vgl. Galle, Geodäsie. Sammlung Schubert XXIII, 7. § 4.

ist dann weiter das folgende: Der bewegliche Arm III wird soweit gedreht, daß er am Punkte (2) anliegt, darauf unter Beibehaltung der Richtung von III das Lineal II soweit verschoben, bis III wieder durch Punkt (1) geht. Jetzt wird der Arm III nach Punkt (3) gedreht, dann II mit III verschoben, bis III durch (2) geht usf. bis zuletzt der Arm III wieder an den Ausgangspunkt (1) angelegt und nach dem Punkte (n) verschoben wird. Jetzt wird die Verschiebung x gegen I an II abgelesen und man erhält, wenn die Entfernung der Marke auf III vom Umdrehungspunkte mit h bezeichnet wird, den Flächeninhalt $F = \frac{1}{2} x h$.[1])

Da die Parallelverschiebung des beweglichen Armes ohne Klemmvorrichtung schwierig ist, wird bei einer abgeänderten Konstruktion eine Glastafel auf die Zeichnung gelegt und der bewegliche Arm durch einen gespannten Faden ersetzt, der mit seiner Fassung auf der Glastafel aufliegt und daher bei Verschiebung der Tafel am Lineal I in seiner Richtung unverändert bleibt. Allerdings kommt hierbei eine Parallaxe bei der Ablesung in Frage, jedoch hat sich das Instrument bei Flächenberechnungen von Waldparzellen als nützlich erwiesen.[2])

36. Planimeter mit Integrierrolle. Bei dem Planimeter von Mönkemöller und dem Äquidistanzplanimeter sind Rollen zu dem Zwecke angebracht, die geradlinige bzw. die kreisförmige Bewegung durch die Umdrehungen der Rolle zu messen, doch mußte in beiden Fällen die Tätigkeit der Rolle bei der Rückwärtsbewegung ausgeschaltet werden. Bei der Verwendung einer Rolle als Hilfsmittel zur Integration fällt diese Beschränkung fort. Die Art der Verwendung bei den Planimeterkonstruktionen ist jedoch eine verschiedene. In erster Linie handelt es sich hierbei um eine Rolle mit flachem oder auch abgerundetem Rande, oder auch um einen Zylinder. Später kommen dann auch Planimeter mit scharfrandigen Rollen in Betracht. Aber nur die erste Art kann als Integrier- oder Meßrolle bezeichnet werden, hierbei dient die Rolle dazu, die

1) Zum Beweise fällt man passender Weise von den beiden äußersten Polygonpunkten (deren einen man als (1) annehmen kann) Senkrechte auf die Richtung des Lineals I. Den Lagen von III vor und nach der jedesmaligen Verschiebung entsprechen zwei parallele Geraden. Die Entfernung des letzten Schnittpunktes von III und I vom Nullpunkt auf l ist dann die Grundlinie des Dreiecks, in das das Polygon verwandelt wird.

2) Bezüglich einiger praktischen Hinweise vgl. Zeitschr. f. Verm. 8, 150, 1879.

Verschiebungen eines Stabes zu messen, der die Fläche überstreicht, deren Inhalt bestimmt werden soll.

37. Theorie dieser Instrumente. Wir stellen uns zunächst einen Stab von konstanter Länge l vor und betrachten die von ihm überstrichene Fläche. Wir nehmen an, daß der Stab durch kleine Verschiebungen nach und nach die Lagen A_0B_0, A_1B_1 ... A_nB_n einnimmt. Um aus der Lage A_0B_0 in die benachbarte A_1B_1 zu gelangen, wird der Stab, wie wir uns vorstellen können, zunächst ein kleines Rechteck $A_0B_0B_0'A_0'$ überstreichen, indem seine Endpunkte die kleinen zu A_0B_0 senkrechten und gleichen Strecken A_0A_0' und B_0B_0' beschreiben, die dem Abstand von A_1 von der Geraden A_0B_0 gleich sind. Darauf wird er sich längs $A_0'B_0'$ verschieben, bis sein Anfangspunkt nach A_1 gelangt. Durch eine Drehbewegung um A_1 als festen Punkt kommt dann sein Endpunkt nach B_1. In ähnlicher Weise wird die Bewegung von A_1B_1 nach A_2B_2 in eine Parallelverschiebung, eine Längsbewegung und eine Sektorbewegung zerlegt usf. Je kleiner die Rechtecke und die Sektoren angenommen werden, um so mehr werden sich die Bewegungen der Endpunkte in kontinuierlichen Kurven vollziehen. Bezüglich des Vorzeichens setzen wir fest, daß einer Bewegung aus der Lage A_kB_k nach $A_{k+1}B_{k+1}$ das positive Vorzeichen zukommt, wenn die neue Lage sich rechts von der alten befindet, das negative im andern Falle und daß dementsprechend auch die überstrichenen Flächenteile mit dem positiven oder negativen Zeichen eingeführt werden. Auf diese Weise erhalten wir, wie dies notwendig ist, dasselbe Ergebnis, wenn wir statt A_0 nach A_0' und B_0 nach B_0' zu verschieben, A_0 bis A_0'' und B_0 bis B_0'' verrücken, wo $A_0A_0'' = B_0B_0''$ der Abstand von B_1 von A_0B_0 ist. Wenn wir dann B_0'' nach B_1 in der Richtung $B_0''A_0''$ verschieben, so daß der Anfangspunkt nach A_0''' kommt, so müssen wir dem Stabe eine negative Drehung erteilen, damit sein Anfangspunkt nach A_1 gelangt. Man sieht aus der Figur sofort, da die Sektoren flächengleich sind, daß in beiden Fällen dieselbe überstrichene Fläche erhalten wird.

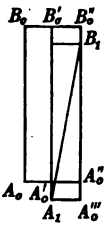
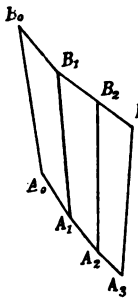


Fig. 34.

Bezeichnen wir die unendlich kleinen Parallelverschiebungen des Stabes mit ds, die unendlich kleinen Drehwinkel mit $d\varphi$, letztere in Bogenmaß gemessen, so ist der Inhalt der überstrichenen Fläche

$$F = l\int ds + \tfrac{1}{2}l^2\int d\varphi.$$

Die Grenzen der Integrale sind durch die Anfangs- und Endlage des Stabes bestimmt. Das erste Integral bezeichnet die Länge des Weges, den ein Punkt des Stabes senkrecht zur Stabrichtung zurücklegt (die Länge der orthogonalen Trajektorie sämtlicher Stablagen). Denken wir uns ferner (Fig. 35) durch einen beliebigen Punkt P der Ebene Parallelen λ zu sämtlichen Stabrichtungen gezogen, so ist $d\varphi = (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Richtungen. Das Integral $\int_0^n d\varphi$ zwischen der ersten und letzten ist daher der Winkel zwischen λ_0 und λ_n und wir erhalten



$$F = l\int ds + \tfrac{1}{2} l^2(\lambda_0, \lambda_n).$$

Fig. 35.

Wenn der Stab wieder in seine Anfangsrichtung zurückkehrt, so ist $(\lambda_0, \lambda_n) = 0$ oder $= 2m\pi$, letzteres, wenn der Stab m volle Umdrehungen gemacht hat. Ist aber $(\lambda_0, \lambda_n) = 0$, so ist

$$F = l\int ds.$$

In den Figuren 36 und 37 sind solche Bewegungen angedeutet, bei denen die Endpunkte des Stabes die geschlossenen Figuren A und B durchlaufen. In der ersten Figur wird die zwischen A und B liegende Fläche C zweimal überstrichen, einmal im positiven und einmal im negativen Sinne. Man erhält daher als Inhalt der ganzen vom Stabe überstrichenen Fläche bis zur Rückkehr in dieselbe Lage $F = A - B$. In der zweiten Figur ist die vom Stabe bestrichene Fläche $+ (A - C) - (B - C) = A - B$, wenn wir den Flächen das ihnen zukommende Zeichen geben. Die kleinen überragenden Flächenstücke D und E kommen nicht in Betracht, da jedes vom Stabe zweimal und zwar in entgegengesetzter Richtung überstrichen wird. Man kann sich auch die Figuren als Projektionen einer Art Röhrenflächen vorstellen, die von den den Stab darstellenden Geraden erzeugt werden. Die algebraische Summe der Projektionen aller Flächeninhalte einer geschlossenen Fläche auf eine Ebene ist nun Null. Die beiden Endflächen sind aber A und B, die Mantelfläche ist F. Durch

Projektion auf die Ebene A z. B. erhalten wir $B + F = A$ oder wie oben $F = A - B$.

Zwingt man den einen Endpunkt des Stabes, z. B. B auf einer Kurve von gegebenem Flächeninhalt (Kreis) oder dem Flächeninhalt Null (Gerade) sich zu bewegen, so ist die vom andern Endpunkt A umfahrene Fläche $A = F + B$ (wo B im zweiten Fall null ist), wenn der Stab wieder in seine Anfangslage zurückkehrt. Um also den Inhalt der von dem einen Endpunkt des Stabes umfahrenen Fläche zu bestimmen, ist außer der Kenntnis der Stablänge nur noch die Messung der Länge des Weges nötig, den ein Punkt des Stabes senkrecht zur Stabrichtung zurücklegt.

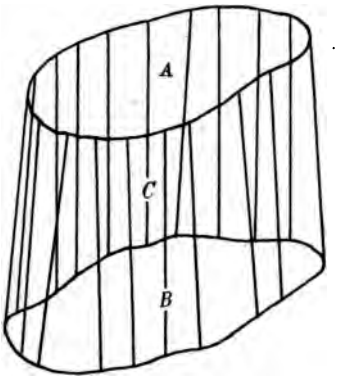


Fig. 36.

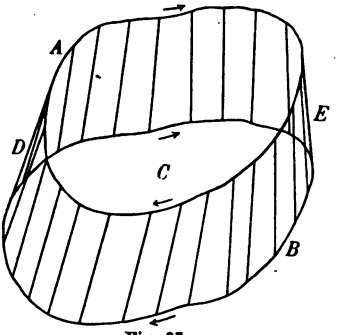


Fig. 37.

Bevor wir die hierzu dienende Vorrichtung besprechen, möge noch eine analytische Beweisführung des der Planimetertheorie zu grunde liegenden Satzes folgen, wodurch seine Gültigkeit für alle Fälle dargetan wird. Wir nehmen ein rechtwinkliges Koordinatensystem an, bei dem die positive y-Achse der positiven x-Achse bei einer Bewegung im Sinne des Uhrzeigers folgt. Bei dem Stabe unterscheiden wir eine bestimmte Richtung von A nach B. Bei einer Drehung des Stabes um einen Endpunkt ist die überstrichene Fläche positiv, wenn die neue Richtung rechts von der alten liegt, also der Winkel zwischen beiden im positiven Sinne rechts herumwächst. Haben wir z. B. ein Dreieck (Fig. 38), das von den beiden Stablagen $l_{1\cdot 2}$ und $l_{1\cdot 3}$ eingeschlossen wird, und sind $\varphi_{1\cdot 2}$ und $\varphi_{1\cdot 3}$ die Winkel derselben mit der x-Achse, so ist

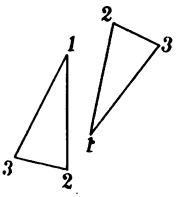


Fig. 38.

der Flächeninhalt des Dreiecks

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} l_{1\cdot 2} \cdot l_{1\cdot 3} \sin(\varphi_{1\cdot 3} - \varphi_{1\cdot 2}) \\
&= \frac{1}{2}[l_{1\cdot 2}\cos\varphi_{1\cdot 2} \cdot l_{1\cdot 3}\sin\varphi_{1\cdot 3} - l_{1\cdot 2}\sin\varphi_{1\cdot 2} l_{1\cdot 3}\cos\varphi_{1\cdot 3}] \\
&= \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] \\
&= \frac{1}{2}[(x_1 y_2 - y_1 x_2) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3)],
\end{aligned}$$

so daß eine zyklische Reihenfolge der Koordinaten der Dreieckspunkte rechts herum im Sinne des Uhrzeigers stattfindet.

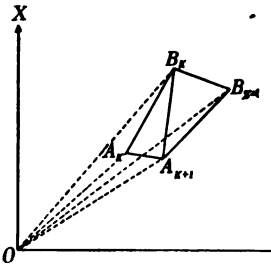


Fig. 39.

Nach diesen Vorbemerkungen betrachten wir zwei auf einander folgende, unendlich wenig verschiedene Stablagen $A_k B_k$ und $A_{k+1} B_{k+1}$ (Fig. 39). Die Koordinaten des Anfangspunktes A bezeichnen wir mit x, y, diejenigen des Endpunktes B mit ξ, η und nach der Verschiebung die Koordinaten von A_{k+1} mit $x + dx$, $y + dy$ und diejenigen von B_{k+1} mit $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$. Für den Flächeninhalt df_1 des Dreiecks $A_k B_k A_{k+1}$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
2\,df_1 &= (x\eta - y\xi) + \xi(y + dy) - \eta(x + dx) + (x + dx)y \\
&\quad - (y + dy)x = (\xi - x)dy - (\eta - y)dx.
\end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir für den Inhalt df_2 des Dreiecks $A_{k+1} B_k B_{k+1}$:

$$\begin{aligned}
2\,df_2 &= (x + dx)\eta - \xi(y + dy) + \xi(\eta + d\eta) - \eta(\xi + d\xi) \\
&\quad + (\xi + d\xi)(y + dy) - (\eta + d\eta)(x + dx) \\
&= \xi d\eta - \eta d\xi + y d\xi - x d\eta + (d\xi dy - d\eta dx) \\
&= (\xi - x)d\eta - (\eta - y)d\xi + \text{Glieder 2. Ordnung.}
\end{aligned}$$

Mit Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung in dem letzten Ausdruck folgt daher für die vom Stabe überstrichene Elementarfläche die Summe $df_1 + df_2 =$

$$dF = \frac{1}{2}(y dx - x dy) - \frac{1}{2}(\eta d\xi - \xi d\eta) + \frac{1}{2} d(\xi y - x\eta).^{1})$$

1) Wir können die drei Teile auch geometrisch direkt ver-

Die Integration ergibt zwischen den gegebenen Grenzen:

$$F = \frac{1}{2}\int (y\,dx - x\,dy) - \frac{1}{2}\int (\eta\,d\xi - \xi\,d\eta) + \frac{1}{2}\,[\xi y - x\eta].$$

Das letzte Glied verschwindet, wenn der Stab in seine Anfangslage zurückkehrt. Das erste Integral stellt den Flächeninhalt der vom Anfangspunkt des Stabes, das zweite die vom Endpunkt

---

anschaulichen: Ist O der Koordinatenanfang, so ist die Dreiecksfläche

$$OA_kA_{k+1} = \tfrac{1}{2}[x(y+dy) - y(x+dx)] = \tfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx),$$

die Fläche

$$OB_kB_{k+1} = \tfrac{1}{2}[\xi(\eta+d\eta) - \eta(\xi+d\xi)] = \tfrac{1}{2}(\xi\,d\eta - \eta\,d\xi),$$

endlich

$$\begin{aligned} OA_{k+1}B_{k+1} - OA_kB_k &= \tfrac{1}{2}[(x+dx)(\eta+d\eta) - (y+dy)(\xi+d\xi)] \\ -\tfrac{1}{2}(x\eta - y\xi) &= \tfrac{1}{2}(x\,d\eta + \eta\,dx - y\,d\xi - \xi\,dy + dx\,d\eta - dy\,d\xi) \\ &= \tfrac{1}{2}\,d(x\eta - y\xi) + \text{Glieder 2. Ordnung} \end{aligned}$$

und es ist

$$\begin{aligned} A_kB_kB_{k+1}A_{k+1} &= OB_kB_{k+1} - OA_kA_{k+1} + OA_kB_k - OA_{k+1}B_{k+1} \\ &= \tfrac{1}{2}(\xi\,d\eta - \eta\,d\xi) - \tfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) + \tfrac{1}{2}\,d(y\xi - x\eta). \end{aligned}$$

Auch als Summe eines Parallelogramms und eines Sektors läßt sich der Ausdruck auffassen. Es ist nämlich anders geschrieben:

$$\begin{aligned} dF &= \tfrac{1}{2}(\xi - x)\,dy - \tfrac{1}{2}(\eta - y)\,dx + \tfrac{1}{2}(\xi - x)\,d\eta - \tfrac{1}{2}(\eta - y)\,d\xi \\ &= [(\xi - x)\,dy - (\eta - y)\,dx] + \tfrac{1}{2}[(\xi - x)\,d(\eta - y) - (\eta - y)\,d(\xi - x)]. \end{aligned}$$

Der erste Teil ist die doppelte Dreiecksfläche $A_kB_kA_{k+1}$ oder die Fläche des Parallelogramms mit den Seiten $A_kB_k = l$ und A_kA_{k+1}. Der zweite Teil ist der Sektor mit dem Winkel $d\varphi$. Denn es ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\eta - y}{\xi - x},$$

also

$$d\varphi = \frac{(\xi - x)\,d(\eta - y) - (\eta - y)\,d(\xi - x)}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

und

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = l^2,$$

daher

$$\tfrac{1}{2}l^2\,d\varphi = \tfrac{1}{2}[(\xi - x)\,d(\eta - y) - (\eta - y)\,d(\xi - x)].$$

Bezeichnen wir noch den senkrechten Abstand der beiden Stablagen, welche den Seiten des Parallelogramms entsprechen, mit ds, so ist $dF = l\,ds + \tfrac{1}{2}l^2\,d\varphi$ und $F = l\int ds + \tfrac{1}{2}l^2\int d\varphi$ wie früher.

umschriebene Fläche dar, so daß wie oben nach der früheren Bezeichnung $F = A - B$ ist.

Dasjenige Hilfsmittel, welches die Bewegungen eines Stabes senkrecht zu seiner Richtung mißt, ist die Rolle. Wir denken uns zunächst den Stab von der Länge l als Achse einer in seiner Mitte angebrachten Rolle, wobei es nicht darauf ankommt, ob die Rolle am Stabe festsitzt, so daß er sich mit der Rolle dreht oder ob die Rolle frei beweglich ist. Die Rolle, die mit leisem Drucke auf die Unterlage gedrückt wird, kann man sich als ein fein gezahntes Rad vorstellen, und man sieht dann, daß bei schiefer Stellung der Radebene dieselbe Abwicklung stattfindet, wie wir oben bereits erwähnt haben. Hat die Rolle einen breiten Rand, wie eine Walze, so trägt sie in der Regel eine feine Riffelung, die man sich als enge Zahnleisten vorstellen wird, welche auf der Unterlage eine entsprechende Riffelung, wenn auch vorübergehend, hervorbringen. Bei schräger Riffelung wären die geradlinigen Zahnleisten durch Schraubenlinien (von großer Ganghöhe) ersetzt. Eine Schraube rollt aber auf ebener Grundlage ebenfalls senkrecht zu ihrer Achse, wenn nicht in der Achsenrichtung eine Kraft wirkt. Daher hat die Art der Riffelung keinen direkten Einfluß auf die Richtung der Rollenbewegung.[1])

Wird der Stab zwar parallel mit seiner Anfangsrichtung verschoben, beschreibt aber sein Mittelpunkt eine gegen die Stabrichtung geneigte Gerade, oder eine beliebige Kurve, so können wir uns die Bahn des Punktes aus unendlich kleinen geradlinigen Wegstrecken zusammengesetzt und diese in zwei Komponenten zerlegt denken, von denen die eine senkrecht, die andere parallel zur Stabrichtung liegt. Ist α der Winkel, den das Wegelement ds mit der Richtung

1) Man kann sich am leichtesten diese Unabhängigkeit der Bewegung einer Walze oder Rolle von ihrer Riffelung dadurch veranschaulichen, daß man sich die einzelnen Riffelleisten in eine große Zahl getrennter Punkte aufgelöst denkt (wie auch in der Tat Walzen in dieser Weise bearbeitet werden, daß Erhebungen mit quadratischer Grundfläche stehen bleiben, um ihnen genügende Reibung zu verleihen). Dann ist es bei gleichmäßiger Verteilung dieser Punkte über die Oberfläche gleichgültig, ob man die in gerader Linie längs der Zylindererzeugenden stehenden sich verbunden denkt (Schraubenlinie von unendlich hoher Ganghöhe) oder ob man die durch eine mehr oder weniger steile Schraubenlinie verbundenen betrachtet. Da sich in der Literatur abweichende Ansichten finden, wurde die oben ausgesprochene auch experimentell erprobt.

des Stabes oder der Rollenachse einschließt, so wird von der Rolle nur in der zum Stabe senkrechten Komponente das Stück $d\sigma = ds \cdot \sin\alpha$ abgewickelt, während bei der Bewegung in der Richtung des Stabes der Berührungspunkt mit der Unterlage derselbe bleibt, also kein Rollen stattfindet. Dreht sich der Stab um seinen Mittelpunkt, so dreht sich die Rolle ebenfalls in demselben Auflagepunkte, so daß für die vom Stabe überstrichene Fläche sich der Inhalt null ergibt; in der Tat werden die beiden Sektoren von den Hälften des Stabes in entgegengesetztem Sinne überstrichen und ihre algebraische Summe ist daher null. Dreht sich der Stab um einen Punkt, der vom Rollenmittelpunkt den Abstand c hat, um den Winkel ψ, so mißt die Rolle die Länge des von ihr beschriebenen Kreisbogens $c \cdot \psi$.

Es ist nun nicht notwendig, daß die Rolle sich im Mittelpunkt des Stabes befindet. Wir setzen nur voraus, daß der Stab sich parallel der Unterlage bewegt. Es ist aber auch nicht erforderlich, daß die Rollenachse in der Richtung des Stabes liegt, sondern nur, daß sie dem Stab parallel und fest mit ihm verbunden ist. Für Parallelbewegungen des Stabes ist dies ohne weiteres ersichtlich. Wird aber der Stab aus der Richtung OA um den Winkel φ gedreht, so daß er in die Richtung OA' gelangt und ist R die Lage der Rolle, die irgendwie fest mit dem Stabe verbunden ist, bei der Anfangsstellung des Stabes und R' für die Stellung OA', so fällen wir (Fig. 40) die Senkrechten RA und $R'A'$ auf die jedesmalige Stabrichtung und bezeichnen den Winkel $ROA = R'OA' = \delta$ und $OA = OA' = r$. Da auch der Winkel zwischen der Rollenachse und OR gleich δ ist, so beträgt die Abwicklung der Rolle für ein kleines Wegestück $d\sigma = ds \cdot \cos\delta$ oder da $ds = OR \cdot d\varphi = r \sec\delta \cdot d\varphi$ ist, $d\sigma = r\,d\varphi$, d. h. die Abwicklung ist dieselbe, als wenn die Rolle im Punkte A des Stabes angebracht wäre.

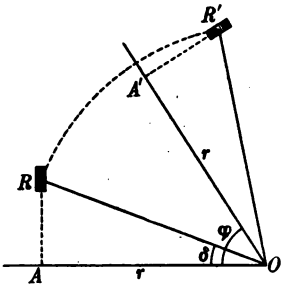


Fig. 40.

38. Koordinatenplanimeter. Wenn wir in der Entwicklung der Formel für den Flächeninhalt auf S. 74, 75 $x = \xi$ setzen, so findet eine Verschiebung des Stabes, der die Fläche überstreicht, parallel zur y-Achse statt und wir erhalten $dF = (y -$ r
Da nun in diesem Falle $y - \eta = l$ die Länge des Stabes dar

so wird bei der Rückkehr in dieselbe Anfangslage $F = 0$. Es geht dies auch daraus hervor, daß die beiden Figuren A und B in diesem Falle kongruent sind, also $A - B = 0$ wird. Wenn wir aber auf unsere allgemeine Betrachtung zurückgehen, so können wir uns einen unendlich langen Stab vorstellen, der sich um den unendlich fernen Punkt der x-Achse dreht und mit seinem andern Endpunkte die gegebene Fläche A umfährt. Bei dieser Umfahrung wird also der Stab sich selbst und der y-Achse parallel bleiben und derjenige Teil der von ihm überstrichenen Fläche, der außerhalb A liegt, in entgegengesetztem Sinne zweimal überfahren werden, so daß man $F = A$ erhalten würde, während B, das durch einen unendlich fernen Punkt dargestellt wird, null ist. Statt des unendlich langen Stabes können wir daher auch einen endlichen Stab von veränderlicher Länge annehmen, indem wir ihn z. B. durch die x-Achse abgeschnitten denken. Wenn wir dementsprechend in unserer obigen Formel $\eta = 0$ setzen, d. h. den einen Endpunkt der Geraden in die x-Achse verlegen. so kann darauf ein Planimeter begründet werden, das $F = \int y\,dx = A$ liefert.[1])

Der Gonellasche Integrationsmechanismus (s. S. 51) dient zur Ermittlung eines solchen Integrals, wenn der Scheibe eine Drehung proportional dx erteilt wird und die Rolle im Abstande y vom Mittelpunkt der Scheibe durch ihre Verbindung mit dem Fahrstift gehalten wird.

Die erste Lösung dieser Aufgabe gab der Bergrat Josef Stadler zu Eisenerz in Steiermark durch das 1855 ersonnene und durch den Bergbeamten Smollin ausgeführte Hyperbel-

1) Um die Integration $F = \int y\,dx$ anschaulich zu machen, zerlegen wir es im Falle einer auf derselben Seite oberhalb der x-Achse liegenden Fläche (und ähnlich in andern Fällen) in zwei Teile, indem wir den Fahrstift zunächst an der oberen Kontur im Sinne wachsender, also positiver dx entlang führen, wobei y mit y_1 bezeichnet werde. Die an dem Stabe angebrachte Rolle wickelt also die Beträge dx ab. Bei der Zurückführung des Fahrstiftes von seiner äußersten Stellung rechts an der unteren Kontur wird $-dx$ von der Rolle abgewickelt, und sind die Ordinaten hier $y = y_2$, so erhält man $y_2 \cdot (-dx)$. Die Fläche der Figur ist nun gleich der zuerst in der Richtung nach rechts überstrichenen Fläche minus der das zweite Mal überstrichenen Fläche innerhalb der Figur, also

$$F = \int y_1\,dx - \int y_2\,(-dx) = \int y_1\,dx + \int y_2\,dx = \int y\,dx.$$

planimeter. Infolge der ungefähr gleichzeitigen Entstehung des Amslerschen Polarplanimeters, das einfacher und praktischer ist, hat es allerdings keine Verbreitung gefunden, seine Idee ist aber wert, kurz erläutert zu werden.

Ein Umdrehungkörper (Fig. 41) sei durch Rotation einer gleichseitigen Hyperbel um eine ihrer Asymptoten entstanden, die die Richtung der y-Achse sei, und ein Zylinder, der auf ihm aufliegt, werde so verschoben, daß seine Achse der x-Achse parallel bleibt. Sein Berührungspunkt beschreibt bei dieser Bewegung eine Hyperbel, deren Gleichung $yz = k^2$ sei und z ist der Radius eines Parallelkreises des Umdrehungskörpers, dessen Ebene senkrecht zur y-Achse steht. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Verlängerung der Zylinderachse den Fahrstift F trägt, mit dem die auszumessende Figur umfahren wird. Bei einer Verrückung des Fahrstiftes parallel der y-Achse bleibt der Zylinder durch einen parallelogrammatischen Führungsmechanismus der x-Achse parallel und rollt von einem Parallelkreis zum anderen. Bei einer Bewegung dx des Fahrstiftes parallel der x-Achse, wird der Zylinder in der Richtung seiner Achse verschoben und bewirkt durch Reibung eine Drehung $d\varphi$ des Umdrehungskörpers um seine Achse. Es ist nun der unendlich kleine Kreisbogen $z\,d\varphi$ des Berührungskreises der Verschiebung des Zylinders dx in seiner Achsenrichtung gleich, also $dx = z\,d\varphi$, mithin $k^2 d\varphi = y\,dx$.

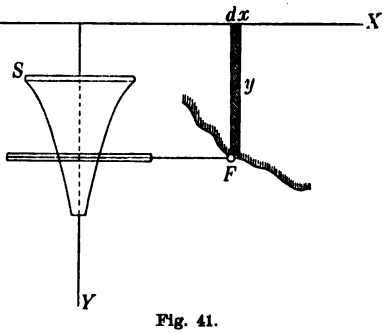


Fig. 41.

Die Umdrehungen des hyperbolischen Körpers und ihre Bruchteile werden durch eine Zählscheibe S an seiner Grundfläche mittels eines Index abgelesen. Zeigte die Zählscheibe vor der Messung die Ablesung φ_1, nach der Messung φ_2, so ist $k^2(\varphi_2 - \varphi_1) = \int y\,dx = F$, also gibt die Ablesungsdifferenz bis auf eine von den Dimensionen des Umdrehungskörpers abhängige Konstante den Flächeninhalt der umfahrenen Figur.[1])

1) Die Konstruktion leidet an dem Mangel, daß der Zylinder bei seiner Parallelbewegung längs des Rotationskörpers nicht horizontal

Gonella wandte bei seinem 1824 erfundenen Planimeter, das mit dem wenig beachteten des bayrischen Trigonometers Hermann (1814) Ähnlichkeit hat, eine Rolle an, die auf einer Kegelfläche läuft (Fig. 42). Er ließ zwei Räder in der geradlinigen Nut eines Lineals, das wir in der Richtung der x-Achse annehmen, hinter einander laufen. Das Gestell, welches sie verbindet, trug die Achse des drehbaren Kegels, der mit dem Grundkreis auf der Zeichenebene rollte, und zwar in der Weise, daß die jedesmal oberste Mantellinie des Kegels parallel der Zeichenebene war. Das Gestell, das man kurz als Wagen bezeichnen kann, wurde nun durch eine Stange geführt, die senkrecht zum Lineale lag; an dieser Stange befindet sich der Fahrstift F, mit dem man die gegebene Figur umfährt. Führt man den Fahrstift um ein Stück dx parallel zum Lineal, so verschiebt sich der Wagen um dasselbe Stück dx und der Kegel dreht sich infolge der Reibung an der Unterlage um einen Winkel $d\varphi$. Wenn der Radius seines Grundkreises k ist, so beträgt die Drehung $d\varphi = \frac{dx}{k}$. Auf dem Kegel liegt die Integrierrolle auf, welche an der in ihrer Längsrichtung in einer Hülse verschiebbaren Führungsstange a so befestigt ist, daß ihre Achse der Stange also der y-Achse parallel ist. Die Rolle berührt den Kegel in dem Abstande y von der Kegelspitze. Ist h die Höhe des Kegels, so ist der Radius des Kreises, der durch den Berührungspunkt der Rolle senkrecht zur Kegelachse geht $r = \frac{yk}{\sqrt{k^2+h^2}}$. Die Abwicklung der Rolle bei der Drehung des Kegels ist daher $d\sigma = r\,d\varphi = \frac{yk}{\sqrt{k^2+h^2}}\,d\varphi$. Bei einer Bewegung des Fahrstiftes parallel der y-Achse gleitet die Rolle, ohne sich zu drehen, längs der Kegelerzeugenden. Es findet also dabei keine Abwicklung statt. Jede beliebige Bewegung des Fahrstiftes kann nun als Resultante dieser

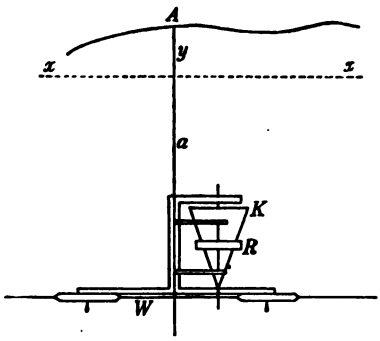


Fig. 42.

bleibt, so daß die Gleichung $dx = z\,d\varphi$ nicht streng erfüllt ist. Deshalb hat auch Stadler der Kurve auf Grund von Versuchen eine von der Hyperbel etwas abweichende Form gegeben.

beiden Bewegungen verstanden werden; und man erhält daher, wenn σ_1 und σ_2 die Ablesungen der Rolle vor und nachher sind

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{k^2 + h^2}} \int y\,dx \quad \text{oder} \quad F = \int y\,dx = \sqrt{k^2 + h^2} \cdot (\sigma_2 - \sigma_1).$$

Mit dem soeben beschriebenen stimmt auch das von Oppikofer, Ingenieur in Unteroppikon, 1827 in Verbindung mit dem Schweizer Mechaniker Ernst konstruierte Planimeter im Prinzipe überein, das in Paris 1836 mit einem Preise ausgezeichnet wurde.

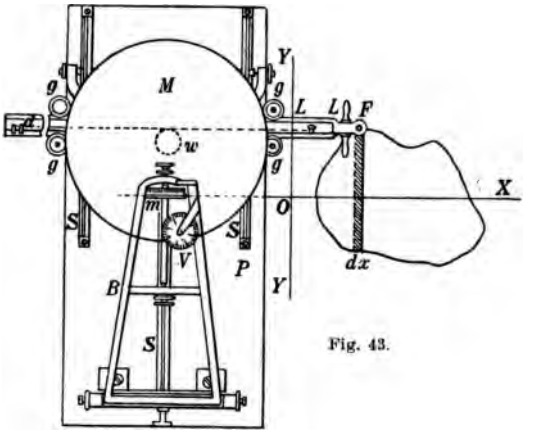


Fig. 43.

Gonella selbst hat 1825 bei einem anderen Instrumente den Kegel durch eine kreisförmige Scheibe ersetzt, deren Drehung proportional der Verschiebung des Wagens ist. Ihm ist darin das Wetlischen Planimeter ähnlich, das durch Starke in Wien (1849) und Hansen in Gotha (1850) noch einige Änderungen und Verbesserungen erfuhr.

Das Wetli-Hansensche Planimeter (Fig. 43) ist auf einer starken Messingplatte *P* aufgebaut. Ein dreifüßiges Gestell ähnlich dem eines Theodoliten läuft auf Rollen in drei parallelen Schienen *S*, wie ein Wagen, hin und her. In der Mitte des Dreifußes erhebt sich eine senkrechte Achse, um die sich, wieder ähnlich wie beim Theodoliten, eine horizontale Scheibe *M* aus Messing dreht, deren Oberfläche ganz glatt mit Papier überzogen ist. Zwischen zwei Paaren von Führungsrollen *g*, die mit dem Dreifuß in fester Verbindung stehen, läßt sich eine prismatische Stange *L* senkrecht zur Schienenrichtung hin- und herschieben. Diese Stange trägt am Ende den senkrecht auf der Zeichenebene stehenden Fahrstift *F*, der also vermöge der Bewegung der Stange zwischen den Führungsrollen in der einen Koordinatenrichtung (der x-Achse) sich bewegen läßt. Längs dieser Stange ist ein Silberdraht *d* gespannt, der vermittelst einer unterhalb der Scheibe an ihrer Achse angebrachten Welle *w*, um die er sich schlingt, die Scheibe bei Ver-

schiebung der Stange in ihrer Richtung in Umdrehung setzt. Nun ist ferner am schmalen Ende der Grundplatte ein senkrechter Ständer quer zur Schienenrichtung angebracht, der in Scharnieren einen aufklappbaren Rahmen B trägt. Der Rahmen hält die Achse der Meßrolle m in der Richtung des den Schienen parallelen Scheibendurchmessers. Bei der Bewegung des Wagens mit der Scheibe verschiebt sich daher der Berührungspunkt der Rolle in diesem Durchmesser.

Ist r die Summe der Halbmesser der Welle und des Drahtes, so bringt eine Verschiebung des Fahrstiftes um dx durch den Silberdraht eine Drehung $d\varphi$ der Scheibe hervor, und es ist $r\,d\varphi = dx$. Ist ferner y der Abstand des Auflagepunktes der an derselben Stelle bleibenden Rolle von dem Mittelpunkt der unter ihr sich verschiebenden Scheibe, so wird die Abwicklung der Rolle der Bewegung des Berührungspunktes auf der Scheibe gleich sein $y\,d\varphi = \varrho\,d\omega = d\sigma$. Wenn man sich also durch den Rollenmittelpunkt die x-Achse gelegt denkt, so ist y die Ordinate des Fahrstifts und $y\,dx = \varrho r\,d\omega = r\,d\sigma$. Sind ω_1 und ω_2 die Ablesungen an der Rolle vor- und nachher, so ist $F = \int y\,dx = r\varrho(\omega_2 - \omega_1)$, d. h. der Flächeninhalt F ist der Differenz der Rollenablesungen bis auf einen von den Dimensionen der Rolle und der Welle abhängigen Faktor gleich.

Dieses Planimeter hat sich verhältnismäßig wenig Freunde erworben, obwohl es gerade bei kleinen Flächen mit einer 7 bis 8 mal größeren Genauigkeit als das später zu besprechende Amslersche Polarplanimeter arbeitet. Abgesehen von den höheren Anschaffungskosten ist dies darin begründet, daß die Leichtigkeit der Bewegung von ihrer Richtung abhängig ist. Auch ist es gegen äußere Einflüsse empfindlich. Dies gilt namentlich für den Draht, der leicht zu Störungen Veranlassung gibt.

Wir lassen auf dieses in der Geschichte der Planimetrie bekannteste ein neueres Koordinatenplanimeter folgen, das aus der Werkstatt von Ch. Hamann in Berlin-Friedenau hervorgegangen ist.

Der ganze Apparat ist auf einer an den beiden Längskanten abgeschrägten Metallplatte montiert. Auf dieser ist an der einen kurzen Querseite der Pol P (Fig. 44) festgemacht, um den sich der Arm $PA = r_1$ drehen läßt. Mit PA hängt in A durch ein Gelenk der ihm an Länge gleiche Arm $AB = r_2$ zusammen. Es ist nun dafür gesorgt, daß B sich der Längskante parallel bewegt. Dies

wird dadurch erreicht, daß B in einem Schlitten befestigt ist, der mit horizontal liegenden Rollen auf beiden Längskanten läuft. In B befindet sich eine Meßrolle, deren Achse in die Richtung von r_2 fällt, deren Ebene also genau senkrecht zu r_2 steht. Durch Stellschrauben läßt sich die Gleichheit $r_1 = r_2 = r$ herstellen. Durch eine besondere Einrichtung der Rollenlager, die in einem Kreisringe liegen, wird eine Abweichung der Richtung der Rollenachse von der Richtung r_2 korrigiert. Unter der Rolle hinweg ist ein flacher Fahrarm horizontal und senkrecht zu den Längskanten der Grundplatte verschiebbar angebracht. Auf seiner Oberseite ist eine Lage Papier eingelassen, auf der die Rolle mit einem geringen Drucke aufliegt, indem sie in einer Gabel innerhalb des erwähnten Ringes liegt. Auf dem Papier findet sie genügend Reibung und wird nicht abgenutzt. Es ist dafür gesorgt, daß der Fahrarm, der am Ende den Fahrstift trägt, senkrecht zu den Längskanten bei der Verschiebung des Schlittens bleibt, indem an diesem angebrachte federnde Rollen ihn an beiden Seiten führen.

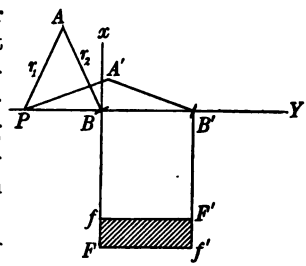


Fig. 44.

Nehmen wir P als Anfangspunkt rechtwinkliger Koordinaten, die Richtung PBB' als y-Achse, die dazu senkrechte Verschiebung des Fahrarms parallel der x-Achse an, so wird bei einer Bewegung des Fahrstifts $Ff' = dx$ die Rolle einen Bogen $d\sigma = \cos\alpha \cdot dx$ abwickeln. Bei einer Bewegung des Fahrstifts parallel der y-Achse (Ff oder $f'F'$) bleibt der Berührungspunkt der Rolle mit dem Fahrarmlineal derselbe, es ändert sich nur der Winkel α, den die Ebene der Rolle mit der x-Achse einschließt; dieser Winkel ist aber gleich dem Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks. Da $y = 2r\cos\alpha$ für jede Lage von B gilt, so erhält man

$$2r\cos\alpha\, dx = 2r\, d\sigma$$

oder

$$y\, dx = 2r\, d\sigma$$

mithin

$$F = \int y\, dx = 2r(\sigma_2 - \sigma_1).$$

Wählt man die Teilung der Rolle so, daß ein Intervall dop so groß ist, wie in der Teilung auf dem Schenkel r, so erhält

den doppelten Wert der Rollenabwicklung $\sigma' = 2\sigma$ durch direkte Ablesung, also

$$F = r(\sigma'_2 - \sigma'_1) = r\sigma'.$$

Die Länge r kann zwar am Schenkel r_2 abgelesen werden, indessen wird sie genauer durch Umfahren einer Figur von bekanntem Flächeninhalt erhalten. Zu diesem Zwecke wählt man etwa ein Quadrat auf Millimeterpapier oder benutzt ein sog. Kontrollineal. Das eine Ende eines solchen Lineals ist mit einer Nadelspitze versehen, die als Mittelpunkt des zu umfahrenden Kreises genommen wird. Der Fahrstift wird in eine der Vertiefungen eingesetzt, die das Lineal trägt, bei denen der Flächeninhalt des von ihnen beschriebenen Kreises angegeben ist. Ist r_0 der am Schenkel des Planimeters abgelesene Wert, so würde $F' = r_0\sigma'$ der genäherte Flächeninhalt sein. Wenn nun der mit dem Kontrollineal gefundene wahre Inhalt F ist, so ist der Fehler $F - F' = (r - r_0)\sigma'$, woraus die wahre Schenkellänge

$$r = \frac{F - F' + r_0\sigma'}{\sigma'}$$

folgt oder auch die Korrektion

$$r - r_0 = \frac{F - F'}{\sigma'}.$$

Die beiden Schenkel AP und AB kann man zur Deckung bringen, indem man den Punkt B unter den etwas höher angebrachten Pol P schiebt. Auf diese Weise lassen sich durch Schräubchen die beiden Schenkel gleich lang machen.

Wir besprechen sogleich bei diesem Instrument die in ähnlicher Weise bei anderen vorkommenden Fehlerquellen. Es sind folgende Bedingungen vorhanden.

1. Die Rollenachse soll horizontal liegen. Bildet sie mit der Horizontalebene einen kleinen Winkel β, so wird (immer vorausgesetzt, daß sie in der Richtung r_2 liegt) die Wirkung nur die sein, daß der Berührungspunkt b ein wenig seitlich nach b' verschoben wird. Dies hat bei der Bewegung des Fahrarmlineals in der Richtung der x-Achse unter der Rolle hinweg keinen Einfluß auf ihre Abwicklung, die beide Male gleich ist. Bei einer Verschiebung des Schlittens (Bewegung in der y-Achse) wird aber die Rolle nicht, wie es sein sollte, unbeweglich bleiben, da ja nur der senkrecht unter dem Schenkelende B liegende Punkt eine ge-

rade Linie beschreibt. Der Berührungspunkt wird also mit dem Radius bb' einen Kreisbogen beschreiben wodurch eine fehlerhafte Abwicklung entsteht. Bei vollständiger Umfahrung der Figur treten indes diese Abwicklungen beim Hin- und Rückweg des Schlittens mit entgegengesetzten Vorzeichen auf und heben sich im Ergebnis auf.

2. Die Rolle soll sich um ihren Mittelpunkt drehen. Ist aber die Rollenachse exzentrisch zur Rolle, der Drehpunkt C' um $CC' = e$ vom Mittelpunkt C entfernt (Fig. 45), so wird durch Drehung um den Winkel φ statt des Bogens OA der Bogen OA' abgewickelt. Das kleine Bogenstück AA' können wir mit dem Abstande $C'D$ vertauschen und gleich $e \sin \varphi$ setzen. Wird die Rolle um 180^0 gedreht, so beträgt der Fehler der Rollenabwicklung $e \sin(180^0 + \varphi) = -e \sin \varphi$. Man muß daher eine zweite Flächenmessung machen, bei der die Rollenablesungen um den halben Umfang verschoben sind, um im Mittel der Umfahrungen das vom Exzentrizitätsfehler befreite Ergebnis zu erhalten.

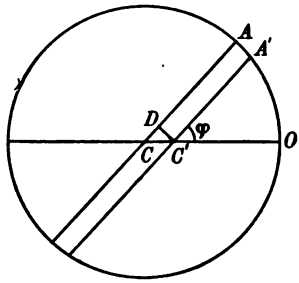


Fig. 45.

3. Die Rollenachse soll die geradlinige Fortsetzung des Schenkels AB (Fig. 44) bilden oder ihm wenigstens parallel sein. Ist aber ein kleiner Winkel ψ zwischen beiden oder wie man sagt, Rollenschiefe vorhanden, so ist $d\sigma = \cos(\alpha + \psi)\,dx$. Da aber $y = 2r \cos\alpha$ bleibt, so wird $2r\,d\sigma = y\,dx - 2r\psi \sin\alpha\,dx$, wenn $\cos\psi = 1$ und ψ für $\sin\psi$ gesetzt wird. Man kann diesen Fehler beseitigen, indem man das gleichschenklige Dreieck auf die andere Seite der y-Achse verlegt und dann die Fläche nochmals umfährt, denn dann wechselt ψ sein Zeichen und das Mittel aus beiden Umfahrungen ist frei von Rollenschiefe. Das Durchschlagen geschieht bei dem Instrumente am einfachsten, wenn man beide Schenkel zur Deckung bringt und gleichzeitig nach unten dreht.[1]) Will man aber nur in ei-

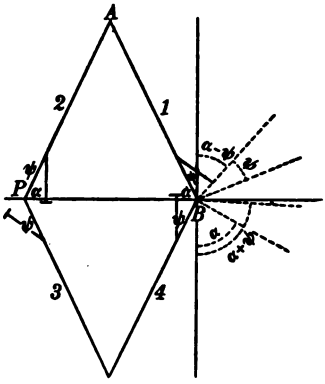


Fig. 46.

1) Um dies leichter zu überblicken, sind in Figur 46 die

Lage arbeiten, so muß man die Rollenschiefe durch die Korrektionsschrauben beseitigen.

4. Die beiden Hauptbewegungsrichtungen des Instrumentes sollen senkrecht gegen einander sein. Weicht aber die Richtung des Fahrarms von der Senkrechten auf den Längskanten der Grundplatte um einen kleinen Winkel ε ab, dann wird der Fahrstift die Strecke $\sec\varepsilon dx$ statt dx zurücklegen. Da die Rolle zugleich den Winkel $\alpha - \varepsilon$ statt α mit dem Fahrarm bildet, so erhält man

$$d\sigma = \cos(\alpha - \varepsilon)\sec\varepsilon\, dx = \cos\alpha dx + \sin\alpha \operatorname{tg}\varepsilon\, dx$$

mithin

$$2r d\sigma = 2r\cos\alpha dx + 2r\sin\alpha\operatorname{tg}\varepsilon dx = y dx + 2r\sin\alpha\operatorname{tg}\varepsilon dx.$$

Wird die Figur mit durchgeschlagenen Schenkeln durchfahren, so tritt $-\varepsilon$ an Stelle von $+\varepsilon$, daher ist das Mittel aus beiden Umfahrungen von diesem Fehler befreit.

5. Die Achsen der Scharniere sollen senkrecht zur Zeichenebene stehen. Dies gilt sowohl für das Polgelenk P, wie für das Gelenk im Punkte A. Ist letzteres nicht der Fall, so beschreibt der Endpunkt des Armes AB um den Endpunkt des Armes PA einen Kreisbogen, das Scharnier selbst eine Kegelfläche. Dieser Fehler (Scharnierschiefe), der vielfach überschätzt worden ist, läßt sich nicht eliminieren.

Die Genauigkeit des Instrumentes, das besonders deshalb nicht für große Figuren geeignet ist, weil bei lang herausgezogenem Fahrarm die Sicherheit seiner Führung senkrecht zur y-Achse verloren geht, beträgt etwa $^1/_{300}$ bis $^1/_{350}$ des Flächeninhaltes, die bei kleinen Figuren bis auf etwa $^1/_{200}$ herabsinkt. Es hat denselben Nachteil, wie das Wetlische Planimeter, daß in den beiden Hauptrichtungen die Bewegung spielend vor sich geht, dagegen in anderen Richtungen je nach ihrer Lage ein größerer oder geringerer Widerstand überwunden werden muß.

Lagen des Schenkels AB unterschieden, wobei die Rollenschiefe stark übertrieben eingezeichnet ist. Lage 1 deutet die Stellung bei der ersten Messung an, bei 2 ist der Schenkel AB mit AP zusammengeklappt, bei 3 ist die Drehung beider Schenkel vollzogen, bei 4 ist AB wieder von AP entfernt und hat die der Lage 1 entsprechende Stellung zur zweiten Messung. Der Winkel der Rollenebene mit der x-Achse ist bei Lage 1 : $\alpha - \psi$, bei Lage 4 : $\alpha + \psi$.

Wir deuten noch ein anderes Prinzip an, auf dem das 1852 von E. Sang beschriebene Planimeter beruht (Fig. 47). Ein Doppelkegel rollt mit seinen beiden gleichen Grundkreisen in einer der x-Achse parallelen Richtung. Die Registrierrolle R ist derartig angebracht, daß sie einen Kreis des Kegels berührt, der den Abstand y von der in der x-Achse sich bewegenden Kegelspitze hat. Den Fahrstift denken wir uns so mit der Rolle verbunden, daß er denselben Abstand y, wie die Rolle, von der x-Achse hat. Ist a der Radius der Grundkreise, so wird bei einer Bewegung des Fahrstiftes und des Kegels um dx der Kegel eine Drehung $d\varphi$ um seine Achse erfahren, die durch $dx = a\,d\varphi$ bestimmt ist. Ein Punkt des Berührungskreises mit dem Radius r wird, wenn h die Höhe der Kegel ist, den Bogen $r\,d\varphi = \frac{1}{h}\,y\,dx$ beschreiben, der durch die Rolle gemessen wird (vgl. S. 80). Es ist also

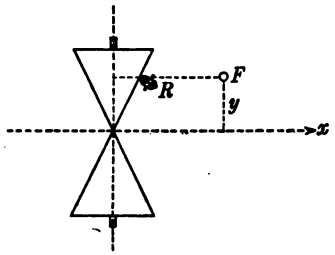


Fig. 47.

$$h\,d\sigma = y\,dx$$

und

$$h(\sigma_2 - \sigma_1) = \int y\,dx = F.$$

39. Linearplanimeter. In der allgemeinen Flächenformel (S. 73, 75) $F = A - B$ kann das zweite Integral

$$B = \tfrac{1}{2}\int(\eta\,d\xi - \xi\,d\eta)$$

auch dadurch zum Verschwinden gebracht werden, daß wir

$$\frac{\eta}{\xi} = c$$

(konstant) setzen; dies bedeutet, daß der eine Endpunkt (ξ, η) des die Fläche überstreichenden Stabes auf einer durch den Koordinatenanfang gehenden Geraden zu laufen gezwungen wird. Diese Gerade kann aber auch ganz beliebig liegen; denn setzen wir

$$\frac{\eta - b}{\xi - a} = c,$$

so folgt

$$(\eta\,d\xi - \xi\,d\eta) - (b\,d\xi - a\,d\eta) = 0.$$

Bei der Integration fallen die beiden Integrale

$$b\int d\xi \quad \text{und} \quad a\int d\eta$$

fort, wenn wir die Fläche vollständig umfahren, also die Grenzen für den Anfangs- und Endpunkt dieselben sind. Wir bezeichnen solche Planimeter, bei denen der eine Stabendpunkt in einer Geraden sich hin und her bewegt, als Linearplanimeter.

Hierher gehört das von dem Erfinder des Hyperbelplanimeters (S. 79) Stadler ersonnene und von ihm Rollplanimeter benannte Instrument. Auf zwei Schienen SS gleitet ein Wagen W, der den um den Zapfen Z drehbaren Fahrarm FR trägt (Fig. 48). An dem einen Ende F ist der Fahrstift, am andern R die Rolle befestigt, deren Achse mit der Richtung des Fahrarms zusammenfällt. Sei die x-Achse parallel, die y-Achse senkrecht zu den Schienen, so mögen x, y die Koordinaten des Fahrstiftes F, x', 0 die des Drehpunktes Z und X, Y die des Rollenmittelpunktes bzw. des senkrecht unter ihm liegenden Auflagepunktes bezeichnen. Ferner sei

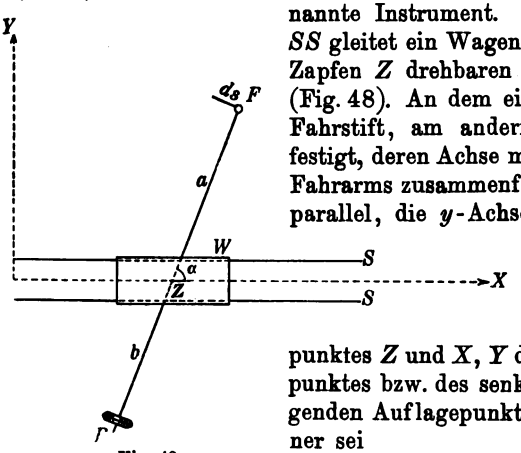


Fig. 48.

$$FZ = a, \quad RZ = b$$

und α der Winkel den ZF mit der x-Achse bildet. Es ist dann

$$x = x' + a\cos\alpha, \quad y = a\sin\alpha.$$

Beschreibt der Fahrstift den kleinen Weg

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

so sind seine Komponenten

$$dx = dx' - a\sin\alpha d\alpha, \quad dy = a\cos\alpha d\alpha.$$

Die Rolle macht gleichzeitig einen Weg dS, der sich aus einer Kreisbewegung um Z mit dem Radius b und einer Parallelbewegung zur x-Achse zusammensetzt. Die Rollenabwicklung gibt nur den zur Rollenachse senkrechten Teil dieser Bewegungen

$$d\sigma = b\,d\alpha + \cos(270^0 + \alpha)dx' = b\,d\alpha + \sin\alpha\,dx'$$

oder

$$d\sigma = b\,d\alpha + \sin\alpha\,dx + a\sin^2\alpha\,d\alpha = \frac{1}{a}\,y\,dx + (b + a\sin^2\alpha)d\alpha$$

und

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{1}{a}\int y\,dx + \left(b + \frac{a}{2}\right)(\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{a}{4}(\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1).$$

Wenn man die Figur[1]) vollständig umfährt, also zur Anfangslage $\alpha_2 = \alpha_1$ zurückkehrt, so erhält man einfach:

$$a(\sigma_2 - \sigma_1) = \int y\,dx = F.$$

Da dieses Resultat die Rollenarmlänge b überhaupt nicht mehr enthält, so kann man b auch zu Null machen, und man gelangt zu dem Linearplanimeter von A. Miller Ritter von Hauenfels (1860 von Breithaupt & Sohn in Kassel angefertigt). Ein Lineal von 52 cm Länge bildet die Führungsbahn für einen Wagen mit zwei Rollenpaaren, von denen das eine in einer Nut von halbkreisförmigem Querschnitt, die beiden andern Rädchen mit etwas breiterem Kranze auf der Ebene des Lineals rollen.[2]) Die Fahrstange, welche sich an einer Stelle zu einem Ring erweitert, wird mit diesem in eine kreisförmige Öffnung des Wagens horizontal eingelegt. Um eine zum Lineal senkrechte Achse im Mittelpunkt des Ringes bzw. der kreisförmigen Öffnung läßt sich die Fahrstange drehen. In derselben vertikalen Achse liegt der Berührungspunkt der Meßrolle, welche bei Bewegung des Fahrarms und des Wagens sich auf der mit Papier überzogenen Gleitbahn des Lineals abwälzt, und deren Teilung ein Nonius gegenübersteht. Die horizontale Drehachse der Rolle läuft in Spitzenschrauben und trägt eine Schraube ohne Ende, welche mit einem im Fahrarm eingelassenen Zählwerk in Verbindung steht. Die Länge des Fahrarms kann verändert werden; zur Ausgleichung seines Gewichtes ist an seiner Rückwärtsverlängerung ein Gegengewicht angebracht. Neben dem Fahrstifte sind zwei Stützen angebracht, die mit dem Auflagepunkt der Rolle zusammen die wagerechte Lage des Fahrarms gewährleisten. Die Theorie ist dieselbe wie beim vorigen Instrument, wenn man $b = 0$ setzt. Auch kann man

1) Das Planimeter muß so aufgestellt werden, daß die auszumessende Fläche ganz umfahren werden kann.

2) Um Spannungen zu vermeiden.

passend $a = a_0 + mi$ setzen, wenn die Fahrarmlänge um m Teile von der Länge i auf der Skala des Fahrarms verändert wird. Bei diesem Instrument kann auch der Fall vorkommen, daß das Lineal innerhalb der zu bestimmenden Fläche liegt und infolgedessen der Fahrarm eine volle Umdrehung macht, um in seine ursprüngliche Lage zurückzukehren. Dann erhält man

$$F = a(\sigma_2 - \sigma_1) - a^2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + 2\pi} \sin^2 \alpha \, d\alpha$$

$$= a(\sigma_2 - \sigma_1) - a^2 \left[\frac{\alpha}{2}\right]_{\alpha_1}^{\alpha_1 + 2\pi} + a^2 \left[\frac{\sin 2\alpha}{4}\right]_{\alpha_1}^{\alpha_1 + 2\pi}$$

oder

$$F = (a_0 + mi)(\sigma_2 - \sigma_1) - a^2\pi,$$

d. h. es tritt noch die Fläche eines Kreises mit der Fahrarmlänge als Radius hinzu.

Die Konstruktion eines Linearplanimeters von Amsler (1882) ist im Prinzip ähnlich (Fig. 49). Auch hier läuft ein kleiner Wagen in den Nuten eines Lineals. Dieser trägt eine horizontale runde Scheibe, die bei der Bewegung des Wagens vermittels einer Übertragung um ihre vertikale Achse gedreht wird, so daß die Drehung der Verschiebung des Wagens proportional ist. Auf dieser mit Papier überzogenen Scheibe liegt die mit dem Fahrarm in fester Verbindung stehende Integrierrolle auf, deren horizontale Achse je nach der Stellung des um einen Punkt des Wagens drehbaren Fahrarms verschiedene Winkel mit dem durch ihren Berührungspunkt gehenden Scheibenradius einschließt.

Bei diesem und dem vorhergehenden Planimeter ist die Abwicklung der Integrierrolle unabhängig von der Beschaffenheit und den Unebenheiten der Zeichenfläche. Das Amslersche Instrument ist nur zur Umfahrung langgestreckter, in der Richtung des Lineals sich ausdehnender Figuren geeignet, da die Drehbewegung des Fahrarms eine beschränkte ist, wenn die Rolle auf der Scheibe bleiben soll.

Da die Drehung der Scheibe der Fortbewegung des Wagens proportional ist, kann man das Element des Drehungswinkels $d\varphi = p\,dx_0$ setzen, wenn x_0 die Abszisse des Drehpunktes 0 ist. Wenn β der Winkel der Rollebene mit dem Scheibenradius r ist, so ist die Rollenabwicklung $d\sigma = \sin\beta \, r\,d\varphi = pr \sin\beta\, dx_0$. Denn nur die Bewegung des Wagens, nicht aber die Drehung des Fahr-

arms, bei der die Rolle in der Richtung ihrer Achse verschoben wird, hat eine Abwicklung zur Folge. Wird die unveränderliche Entfernung des Scheibenmittelpunktes vom Drehpunkt des Fahrarms $OS = s$ gesetzt, so ist

$$r \sin \beta = s \sin \alpha,$$

also

$$d\sigma = ps \sin \alpha d x_0.$$

Nun ist wie früher

$$dF = a \sin \alpha d x_0 - a^2 \sin^2 \alpha d\alpha,$$

mithin

$$dF = \frac{a}{ps} d\sigma - a^2 \sin^2 \alpha d\alpha$$

und

$$F = \frac{a}{ps} (\sigma_2 - \sigma_1) - a^2 \int \sin^2 \alpha d\alpha,$$

wo das zweite Glied bei der Rückkehr zur Anfangslage Null wird (bzw. $= \pi a^2$, wenn der Fahrarm eine volle Umdrehung gemacht hat).

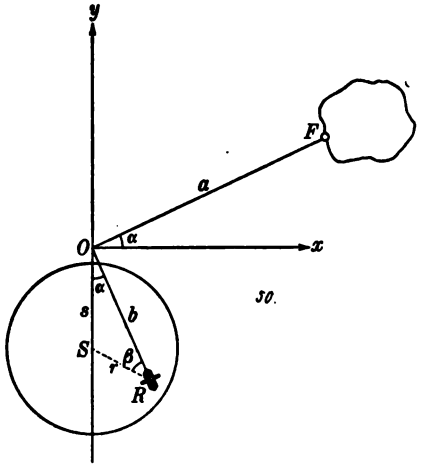


Fig. 49.

Man kann die besprochenen Linearplanimeter als Vorläufer des Rollplanimeters von Hohmann-Coradi ansehen, das ebenfalls besonders für langgestreckte Figuren (und zwar von beliebiger Länge) sich eignet (Fig. 50). Bei ihm bewegt sich ein Gestell auf zwei an den Enden einer Längsachse sitzenden breiten Walzen in der zu ihr senkrechten Richtung. Auch hier trägt das Gestell eine horizontale Scheibe, die sich bei der Fortbewegung des Instrumentes proportional dem zurückgelegten Wege um ihre senkrecht stehende Achse dreht. Der Fahrarm läßt sich um eine ebenfalls an dem Gestell angebrachte senkrechte Achse drehen und ist im rechten Winkel mit dem Rollenarm verbunden, der die auf der Scheibe aufliegende Integrierrolle trägt, deren Achse der Richtung des Fahrarms parallel ist.

Es seien W_1 und W_2 die beiden walzenförmigen Rollen, die auf besondere Art rauh gemacht, die Parallelbewegung des Instrumentes in der Richtung der x-Achse gewährleisten; die eine von ihnen, W_1, ist an einer Seite mit einem konischen, gezahnten Rädchen versehen, das in ein auf der Achse der Scheibe S sitzendes horizontales Rädchen eingreift. Ist R_1 der Radius der Walze W_1

(und W_2), $R_1 d\psi = dx_0$ ihre Abwicklung (gleich dem Fortrücken des Drehpunktes O des Fahrarms in der Richtung der x-Achse), so dreht sich das mit ihr verbundene konische Zahnrad, das an der Berührungsstelle mit dem Scheibenrad den Radius R_2 haben möge, um $R_2 d\psi = \frac{R_2}{R_1} dx_0$. Ist der Radius dieses an der Scheibenachse sitzenden Zahnrädchens R_3, so ist seine Abwicklung $R_3 d\varphi = R_2 d\psi$, also der Winkel, um den sich die Scheibe dreht,

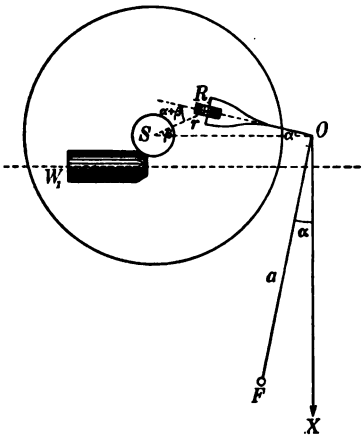


Fig. 50.

$$d\varphi = \frac{R_2}{R_1 R_3} dx_0 = p dx_0.$$

Wenn nun der Berührungspunkt der Rolle die Entfernung r vom Scheibenmittelpunkt hat, so ist die Bewegung des Berührungspunktes $r d\varphi$, und wenn β der Winkel von r mit SO (y-Achse) und α der Winkel des Rollenarms mit der Richtung OS ist, so beträgt die Abwicklung der Integrierrolle mit dem Radius ϱ und dem Drehungswinkel ω:

$$\varrho d\omega = r d\varphi \sin(\alpha + \beta) = rp \sin(\alpha + \beta) dx_0.$$

Da nun ($OF = a$ gesetzt)

$$x = x_0 + a \cos\alpha, \quad y = a \sin\alpha$$

die Koordinaten des Fahrstiftes sind, so ist wieder

$$dF = y dx = \frac{a\varrho}{pr} \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} d\omega - a^2 \sin^2\alpha d\alpha$$

und mit Rücksicht auf

$$r \sin(\alpha + \beta) = s \sin\alpha,$$

wenn s die konstante Entfernung des Drehpunktes O vom Scheibenmittelpunkte S ist:

$$F = \int \frac{a\varrho d\omega}{sp} - a^2 \int \sin^2\alpha d\alpha.$$

Setzen wir noch

$$\frac{aR_1R_2}{sR_3} = C, \quad \varrho d\omega = d\sigma,$$

so wird für eine geschlossene Umfahrung:

$$F = C(\sigma_2 - \sigma_1).$$

Um eine Vorstellung von den Dimensionen zu erhalten, so gab nach Reitz ein Planimeter mit einem Fahrarm von 50 mm Länge für die Noniuseinheit den Flächenwert 0,2 qmm und man konnte einen Streifen von 4 cm Breite ausmessen. Wurde der Fahrarm auf 125 mm verlängert, so betrug die Fläche, welche durch eine Einheit am Nonius gemessen wird, 0,5 qmm und die Breite des Streifens stieg auf 15 cm.

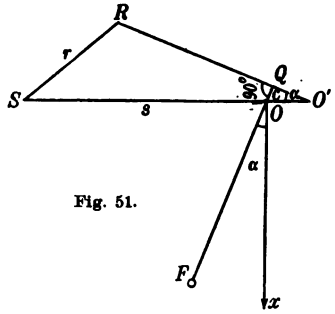


Fig. 51.

Für die Theorie wurde angenommen, daß die Konstruktionsbedingungen erfüllt sind. Es kommt darauf an, die durch Abweichungen von diesen Bedingungen entstehenden Fehler zu untersuchen.

1. Wenn zwar die Achse der Integrierrolle dem Fahrarm parallel ist, aber die Rolle sich auf ihrer Achse verschoben hat, so geht die Ebene ihres Laufkreises nicht durch den Drehpunkt O des Fahrarms hindurch, sondern an ihm vorbei und schneidet FO in Q (Fig. 51). Dann tritt an Stelle des Dreiecks SOR das Dreieck $SO'R$ mit den Winkeln α und β', wobei aber der Punkt O' je nach der Stellung des Fahrarms FO und mit dem Winkel α sich verrückt und zwar so, daß $OQ = OO' \sin\alpha = c$ konstant bleibt. Es war nun

$$\varrho d\omega = pr \sin(\alpha + \beta) dx_0$$

oder wegen

$$r \sin(\alpha + \beta) = s \sin\alpha,$$

wenn

$$\frac{sR_2}{aR_1R_3} = s'$$

gesetzt wird,

$$\varrho d\omega = s' y dx_0.$$

Da jetzt

$$r \sin(\alpha + \beta') = (s + OO') \sin\alpha = s \sin\alpha + c$$

wird, so ist jetzt

$$\varrho d\omega = s' y dx_0 + c' dx_0.$$

Wenn dieser Ausdruck integriert wird, so fällt bei vollständiger Umfahrung $c\int dx_0$ fort, und der in Rede stehende Fehler ist einflußlos.

2. Ist die horizontale Projektion von SO (der Verbindungsgeraden des Scheibenmittelpunktes und des Drehpunktes des Fahrarms) mit der Walzenachse $W_1 W_2$ nicht genau parallel, sondern schließen beide den kleinen Winkel ε miteinander ein, so entsteht ein Fehler.

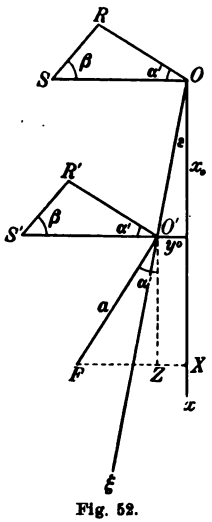


Fig. 52.

Wir nehmen als x-Achse die Senkrechte auf der Anfangslage von OS im Punkte O und bezeichnen den Winkel des Fahrarms mit dieser Achse mit α', während wir die zur Walzenachse senkrechte Fortbewegungsrichtung des Instrumentes mit ξ bezeichnen. Durch Fortbewegung sei nun der Punkt O längs der ξ-Achse in die Lage $O'(x_0' y_0')$ gekommen, S' sei dann der Scheibenmittelpunkt, R' der Berührungspunkt der Rolle mit der Scheibe. Im Dreiecke $R'S'O'$ ist dann der Winkel bei O' gleich α' und es besteht wie früher die Gleichung

$$d\sigma = \varrho d\omega = pr \sin(\alpha' + \beta) d\xi_0$$

oder wegen $r \sin(\alpha' + \beta) = s \sin \alpha'$

$$d\sigma = ps \sin \alpha' d\xi_0.$$

Nun ist

$$\cos \varepsilon = \frac{x_0}{\xi_0}, \qquad \sin \varepsilon = \frac{y_0}{\xi_0}$$

und

$$x - x_0 = a \cos \alpha' \quad \text{oder} \quad x = a \cos \alpha' + \xi_0 \cos \varepsilon$$
$$y - y_0 = a \sin \alpha' \quad \text{oder} \quad y = a \sin \alpha' + \xi_0 \sin \varepsilon$$

Es wird also

$$dx = -a \sin \alpha' d\alpha + \cos \varepsilon d\xi_0$$

$$d\xi_0 = \frac{d\sigma}{ps \sin \alpha'} = \sec \varepsilon (dx + a \sin \alpha' d\alpha)$$

$$d\sigma = ps \cdot \sec \varepsilon (\sin \alpha' dx + a \sin^2 \alpha' d\alpha)$$

$$= \sec \varepsilon \cdot \frac{ps}{a} [(y - y_0) dx + a^2 \sin^2 \alpha' d\alpha].$$

Bei der Integration über eine geschlossene Kurve fällt wie früher das letzte Glied fort, und es bleibt

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \sec\varepsilon \cdot \frac{ps}{a}\left[\int y\,dx - \int y_0\,dx\right].$$

Außer dem Faktor $\sec\varepsilon$ ist also noch ein Flächenintegral hinzugekommen. Diese fehlerzeigende Figur kann man sich von dem Punkte Z beschrieben denken, welcher auf der Ordinate des Punktes F durch die von O' gefällte Senkrechte getroffen wird, indem $ZX = y_0$, $OX = x$ die Koordinaten von Z sind.

3. Ein weiterer Fehler entsteht, wenn die Achse der Integrierrolle dem Fahrarm nicht parallel ist oder $O'R'$ nicht zu $O'F$ senkrecht ist.

Es sei $R'O'F = 90^0 + \varepsilon$, wo ε klein sein soll, so legen wir in der Anfangsstellung des Instrumentes die x-Achse so, daß sie mit SO den Winkel $90^0 + \varepsilon$ einschließt und mit der Fortbewegungsrichtung des Instrumentes (ξ-Achse) den Winkel ε bildet. Für eine beliebige Stellung des Instrumentes ist dann der Winkel $R'O'S' = \alpha'$ dem Winkel des Fahrarms mit der x-Achse gleich. Wir erhalten also eine ganz ähnliche Figur wie im vorigen Falle (nur daß $R'O'F$ kein rechter Winkel ist).

Wenn F auf der andern Seite der x-Achse liegt, so liegen F und Z auf verschiedenen Seiten derselben, d. h. das Vorzeichen der hinzutretenden Fläche ändert sich. Man kann also durch Umfahrung einer Fläche von bekanntem Inhalt (einmal auf der einen, das andre Mal auf der andern Seite der x-Achse) die Größe der fehlerzeigenden Figur als halbe Differenz der Ergebnisse ermitteln. Als Gebrauchsvorschrift für das Instrument ergibt sich zugleich die Regel, daß für die auszumessende Figur die Bewegungsrichtung des Mittelpunktes des Instrumentes nahezu eine Symmetrielinie sein soll.

4. Wenn die Walzen nicht genau gleiche Durchmesser haben oder die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt des Instrumentes geht und die Riffelung der Walzen keinen hinreichenden Widerstand gegen den exzentrisch ausgeübten Zug des Fahrarms bietet, so wird der Drehpunkt keine gerade Linie senkrecht zur Walzenachse in ihrer Anfangslage, sondern einen Kreisbogen beschreiben.

Zur Anfangslage W_1W_2 sei die x-Achse durch O senkrecht gelegt. In der Lage $W_1'W_2'$ schließe die Senkrechte zur Walzenachse den Winkel γ mit der x-Achse ein; den Übergang zu einer

benachbarten Lage $W_1'' W_2''$ kann man in eine Parallelbewegung und eine Drehbewegung um O_2 zerlegt denken. Bei der Parallelbewegung, die senkrecht zur Walzenachse erfolgt, wird der Bogen $ds = \sec \gamma dx_0$ abgewickelt und von der Integrierrolle

$$d\sigma = pa \sin \alpha ds = pa \sin \alpha \sec \gamma dx_0.$$

Da ferner

$$x = x_0 + a \cos(\alpha + \gamma)$$

und

$$dx = dx_0 - a \sin(\alpha + \gamma)\, d(\alpha + \gamma),$$

so wird

$$d\sigma = pa \sin \alpha \sec \gamma dx + pa^2 \sin \alpha \sec \gamma \sin(\alpha + \gamma) d(\alpha + \gamma).$$

Wenn man annehmen darf, daß das Instrument bei vollständiger Umfahrung einer Figur in seine anfängliche Lage zurückkehrt, so verschwindet bei der Integration der zweite Teil dieses Ausdrucks. Im ersten Teil ist $a \sin \alpha \sec \gamma$ derjenige Teil der Ordinate des Fahrpunktes, der zwischen diesem und der Bahntangente des Punktes O_2 liegt. Ist S der Schnittpunkt der Bahntangente mit der Ordinate, so ist der geometrische Ort des Punktes S die Umgrenzung eines Flächenstückes, das um so kleiner ist, je kleiner der Winkel γ ist. Man kann daher diese Figur wiederum als fehlerzeigende betrachten, die von der Integrierrolle algebraisch zu der auszumessenden Fläche addiert wird. Auch hier ändert sich das Vorzeichen, wenn F auf verschiedenen Seiten der x-Achse liegt und der Fehler wird am wenigsten Einfluß haben, wenn die Senkrechte zur Walzenachse eine Symmetrielinie der auszumessenden Fläche ist.

Amsler hat darauf hingewiesen, daß bei einer auf einer Ebene aufliegenden Rolle ein Gleiten nicht gänzlich beseitigt werden kann und dadurch die Messung verfälscht wird. Man ersetzt deshalb die Rolle durch einen Zylinder und die Ebene durch eine Kugelfläche (S. 52).

Das mit dieser Vorrichtung versehene Planimeter wird als Kugelrollplanimeter bezeichnet (Fig. 53). Es ist ganz ähnlich dem vorher beschriebenen konstruiert. In die eine Walze R sind am Umfange Zähne eingeschnitten, welche in ein darüber befindliches vertikales Zahnrad eingreifen, dessen Drehungsachse mit der Walzenachse A parallel ist und senkrecht über ihr liegt. Diese Achse trägt an ihrem in der Mitte des Instruments befindlichen Ende ein Kugelsegment K, dessen Mittelpunkt in ihr liegt. An das glockenartige

Kugelsegment, dessen ebene Endfläche senkrecht zur horizontalen Walzenachse steht, legt sich durch Federdruck ein horizontaler um seine Achse drehbarer Zylinder an, dessen Umdrehungen nebst ihren Bruchteilen an einem besonderen Zählwerk abgelesen werden. Mit dem Zylinderlager (dem Rahmen M, der den Zylinder trägt) ist der Fahrarm verbunden, der der Zylinderachse parallel liegt. Der Zylinder soll die Kugelfläche in ihrem größten Horizontalkreise berühren. Befindet sich der Fahrarm in seiner Grundstellung, nämlich senkrecht zur Walzenachse und damit auch senkrecht zur Achse des Kugelsegments, so findet die Berührung von Kugel und

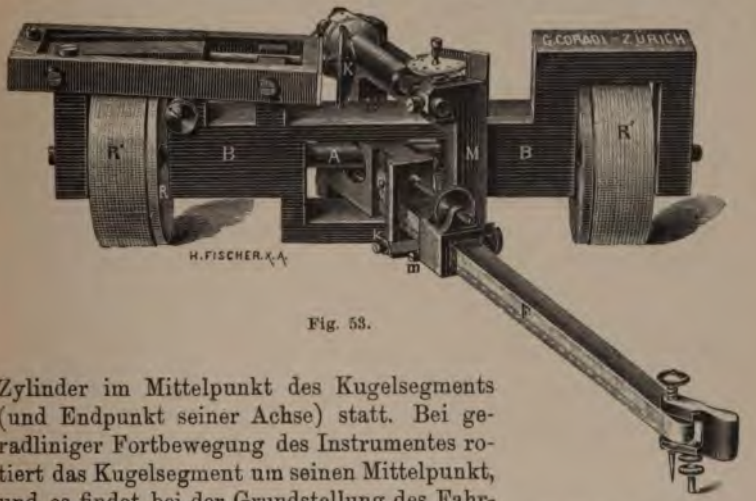


Fig. 53.

Zylinder im Mittelpunkt des Kugelsegments (und Endpunkt seiner Achse) statt. Bei geradliniger Fortbewegung des Instrumentes rotiert das Kugelsegment um seinen Mittelpunkt, und es findet bei der Grundstellung des Fahrarms keine Bewegung des Zylinders statt. Aber es entsteht auch, wenn die Berührung bei der Grundstellung des Fahrarms etwas oberhalb oder unterhalb der Mitte des Kugelsegments stattfindet, keine Rotation des Zylinders durch Bewegung des Wagens, sondern nur eine geringe Bewegung parallel der Zylinderachse. Wenn dagegen der Fahrarm um seine vertikale Drehachse bewegt wird, so wird eine geringe Umdrehung des Zylinders verursacht, falls die Berührung nicht auf dem größten Horizontalkreise des Segments bleibt.[1]) Die Meßrolle tritt dagegen in Tätigkeit, sobald das In-

1) Diese Drehung wird eine Funktion des Winkels α sein, den der Fahrarm mit seiner Grundstellung bildet. Bei der Umfahrung

strument bewegt wird und der Fahrarm außerhalb der Normalstellung steht.

Bezeichnen wir den Radius der Walzen R^1, R^2 mit W, so ist ihre Abwicklung $W d\psi = dx_0$ gleich dem von dem Drehpunkt des Fahrarms zurückgelegten Wegelement. Das in die Walze eingreifende Zahnrad mit dem Radius r' wird eine Drehung um $d\varphi$ erleiden, die durch $r' d\varphi = W d\psi = dx_0$ bestimmt ist. Da der Drehungswinkel des Kugelsegmentes ebenfalls $d\varphi$ ist, so können wir die auf S. 51 gegebene Entwicklung anwenden. Wir nehmen an, der Berührungspunkt P des Zylinders stehe vom Mittelpunkt C des Segmentes oder Endpunkte der Achse um $r\delta$ im Bogen größten Kreises ab. Der Bogen des durch P gehenden Vertikalkreises, der durch den obersten Punkt Z der vervollständigten Kugel geht, ist dann, da seine Ebene die Zylinderachse senkrecht durchschneidet, als Rollenebene (im Sinne obiger Entwicklung) zu betrachten. Der Winkel, den PZ und PC einschließen, sei γ. Dann ist die Abwicklung des Zylinders $\varrho d\omega = r \sin\delta \sin\gamma d\varphi$. Nun ist der Winkel der Vertikalebene ZP mit der Vertikalebene ZC der Kugelachse gleich dem Winkel α des Fahrarms mit seiner Grundstellung. Es ist also $\sin\alpha = \sin\delta \sin\gamma$, mithin

$$\varrho d\omega = r \sin\alpha d\varphi = \frac{r}{r'} \sin\alpha dx_0.$$

Führen wir wieder

$$a \sin\alpha = y, \quad a \cos\alpha = x - x_0, \quad dx_0 = dx - a \sin\alpha d\alpha$$

ein, so folgt

$$\varrho d\omega = \frac{r}{r'a} y dx - \frac{r}{r'} a \sin^2\alpha d\alpha$$

und bei der Integration über eine geschlossene Kurve

$$F = \frac{ar'}{r} (\sigma_2 - \sigma_1).$$

Die Prüfung des Instrumentes wird am einfachsten in der Weise ausgeführt, daß man einmal dieselbe Fläche in verschiedenen Lagen zur Abszissenachse und zweitens Figuren mit verschiedener Umgrenzung, aber mit gleichem Flächeninhalt umfährt. Wenn

einer geschlossenen Figur wird das Integral $\int f(\alpha) d\alpha$ nahezu verschwinden, wenn eine Rückkehr zu demselben Ausgangwert von α stattfindet, da $f(\alpha)$ dieselben Werte mit anderen Zeichen durchlaufen wird.

diese Unabhängigkeit von Lage und Gestalt innerhalb der Grenzen der Genauigkeit nicht vorhanden ist, so lassen sich im allgemeinen die Konstruktionsmängel nur durch den Mechaniker beseitigen. Es ist nur eine Berichtigungsvorrichtung vorhanden, welche den Rahmen der Integrierrolle im horizontalen Sinne zu verstellen gestattet, um den Parallelismus von Zylinderachse und Fahrarm herzustellen[1]), während die Horizontalität der Zylinderachse, die eine besonders wichtige Bedingung ist, als mechanisch erreichbar stillschweigend vorausgesetzt wird.

Die Konstante bestimmt man bei diesen Instrumenten am sichersten durch Umfahren einer Figur von bekanntem Flächeninhalt z. B. mit Benutzung eines Kontrollineals (s. o. S. 84). Sowohl bei der Justierung (durch Einstellung des Fahrarms auf eine gewünschte Länge durch Schraube m, die der Konstanten einen runden Wert erteilt), wie bei der Anwendung des Instrumentes zur Flächenmessung ist es empfehlenswert, die Umfahrung in solcher Stellung zu beginnen, wo die Meßrolle eine geringe oder gar keine Bewegung erleidet, also bei der Grundstellung des Fahrarms, weil hierbei eine kleine Unsicherheit in der Anfangs- und Endlage keinen bemerkenswerten Einfluß auf die Ablesung ausübt und ebenso wenig eine anfängliche Trägheit der Rollenbewegung bemerkbar wird.

40. Polarplanimeter. Mit der Ausbildung der Koordinaten- und Linearplanimeter ist die Entwicklung der Polarplanimeter parallel vor sich gegangen.

Das Polarplanimeter lehnt sich in seiner Konstruktion an das Vorbild des menschlichen Armes (bei Horizontalbewegung desselben) an, indem wie der Oberarm im Schultergelenk, der Polarm sich um einen festen Punkt als Pol dreht. Mit ihm ist durch ein Scharnier, das dem Ellbogengelenk entspricht, der dem Unterarm vergleichbare Fahrarm verbunden, der die Hülse für den Fahrstift wie die Hand die Feder trägt. Die Bewegungen des Fahrarmes senkrecht zu seiner Richtung werden wiederum durch die Abwicklung

1) Wenn die Zylinderachse mit dem Fahrarm in der Horizontalprojektion einen Winkel ε bildet, so erhält man ähnlich wie beim vorigen Instrument, abgesehen von einem konstanten Faktor $\cos \varepsilon$, den richtigen Flächeninhalt als Mittel aus 2 Umfahrungen zu beiden Seiten der x-Achse, und es folgt wieder als Regel, die auszumessenden Figuren symmetrisch zur x-Achse zu legen (langgestreckte Rechtecke und ähnliche Figuren in schräger Lage), um das auftretende Integral $\int \cos \alpha \, dx$ möglichst geringen Einfluß gewinnen zu lassen.

einer Meßrolle gemessen. Das eine Ende des Fahrarms wird in einem Kreisbogen mit dem Polarm als Radius geführt, während das andere Ende die auszumessende Figur umfährt.

Die älteste Idee eines Polarplanimeters stammt aus dem Jahre 1814 von dem Trigonometer Hermann in München, es wurde dann unabhängig von A. Miller von Hauenfels in Leoben 1855 und wahrscheinlich ein Jahr früher von Jakob Amsler erfunden, der zwar seine Erfindung erst 1856 veröffentlichte, tatsächlich aber derjenige ist, der das Polarplanimeter in die Praxis einführte und damit alle andern Planimeter zurückdrängte.

Endlich hat auch Clark Maxwell fast gleichzeitig ein Polarplanimeter konstruiert, das dadurch bemerkenswert ist, daß eine Kugel auf einer anderen sich abwälzt, eine Einrichtung, die wohl bei keinem andern Planimeter verwendet worden ist. Auch ist von Buniakowsky in Petersburg und Decker in Augsburg ein Polarplanimeter erfunden worden, das aber ebensowenig wie das vorhergehende in Konkurrenz mit Amslers Konstruktion getreten ist.

In der allgemeinen Formel $F = A - B$ (S. 73) ist beim Polarplanimeter A die vom Fahrstift umschriebene Fläche, B ist durch die vom Gelenk zwischen Fahrarm und Polarm beschriebene Kreiskurve begrenzt und F ist der vom Fahrarm überstrichene und durch die Rollenablesung gegebene Flächeninhalt. Je nachdem der Gelenkpunkt, den wir im folgenden mit O bezeichnen wollen, einen Kreisbogen hin und zurück oder einen vollen Kreis beschreibt, wird B Null oder der Fläche eines Kreises gleichzusetzen sein. Um aber Fehlerbetrachtungen anschließen zu können und auf die besonderen Konstruktionen der Instrumente Rücksicht zu nehmen, ist es wie bei den früheren Planimetern nötig, die Theorie genauer zu entwickeln.

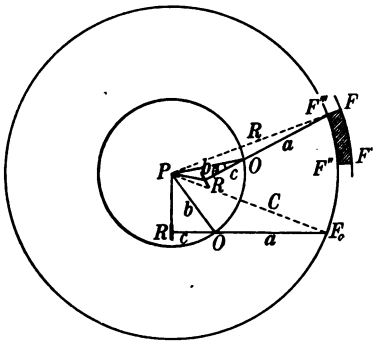


Fig. 54.

Es sei (Fig 54) P der Pol, $PO = b$ der Polarm, $OF = a$ der Fahrarm, $PF = R$ der Leitstrahl des Fahrstiftes. Die Meßrolle R ist gewöhnlich in der Rückwärtsverlängerung des Fahrarms angebracht, und es sei $OR = c$. Ist sie zwischen O und F gelegen, so muß c mit negativem Zeichen ein-

geführt werden. Im ersten Falle kann der Fahrstift F zu beiden Seiten des Fahrarms nur Bögen von nahezu 180° umfahren.

Lassen wir F einen Kreisbogen FF' um den Pol als Mittelpunkt beschreiben, so bleibt für konstantes R das Dreieck POF unverändert und das ganze Instrument wird ohne Veränderung der Lage des Fahrarms zum Polarm um den Zentriwinkel φ des Kreisbogens herumgeschwenkt. Die Rolle R beschreibt infolgedessen ebenfalls einen Kreisbogen um P mit demselben Zentriwinkel φ, dessen Radius r sei. Wenn die Rollenachse, die dem Fahrarm parallel liegt, mit dem Radius PR den während dieser Bewegung unveränderlichen Winkel α einschließt, so beträgt ihre Abwicklung, wenn wie früher ϱ der Radius, ω der Drehungswinkel der Rolle um ihre Achse ist, $\sigma = \varrho\omega = r\varphi\cos\alpha$. Wird noch der Winkel zwischen Polarm und (verlängertem) Fahrarm mit $POR = \beta$ bezeichnet, so ist $c = b\cos\beta - r\cos\alpha$, mithin

$$\sigma = (b\cos\beta - c)\varphi \quad \text{und da} \quad R^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\beta \text{ ist,}$$

$$\sigma = (R^2 - a^2 - b^2 - 2ac)\frac{\varphi}{2a}.$$

Führt man noch die Bezeichnung $C^2 = a^2 + b^2 + 2ac$ ein, so wird

$$a\sigma = \tfrac{1}{2}(R^2 - C^2)\varphi.$$

C kann man als den besonderen Wert von R auffassen, für den $c = b\cos\beta$, also $r\cos\alpha = 0$, $\alpha = 90^0$ und $\sigma = 0$ ist. Dies findet dann statt, wenn PR zu F_0R senkrecht steht (unten in Fig. 54) oder mit anderen Worten, wenn der Fahrarm so gestellt ist, daß die Ebene der Rolle durch den Pol geht. Man nennt den Kreis mit dem Radius C den Grundkreis. Bei der Bewegung des Fahrstiftes auf dem Grundkreis ($R = C$) findet keine Rollenabwicklung statt. Führt man den Fahrstift dagegen auf dem Kreisbogen FF', so folgt aus obiger Gleichung, daß die mit der Fahrarmlänge multiplizierte Rollenabwicklung der Differenz der Kreissektoren mit dem Zentriwinkel φ und den Radien R und C gleich ist, d. h. dem Kreisringstück $FF'F''F'''$ zwischen dem beliebig gewählten Kreise und dem Grundkreise, das durch die Radienvektoren am Anfang und Ende der Bewegung begrenzt ist. Dieselbe Rollenabwicklung würde man aber auch bei Umfahrung des Kreisringstückes $FF'F''F'''$ erhalten, da bei Führung des Stiftes auf den radialen Strecken $F'F''$ und $F'''F$ die Rolle dieselben Umdrehungen aber in entgegengesetztem Sinne macht, also die Abwicklung sich

aufhebt und längs $F''F'''$ auf dem Grundkreise die Rolle unbewegt bleibt.

Eine beliebige Fläche kann man sich von einer Kurve begrenzt denken, die aus unendlich kleinen Kreisbogenstücken und radialen Strecken in bezug auf P als Mittelpunkt besteht. Umfährt der Punkt F diese Begrenzungskurve, so bestreicht der Radiusvektor PF Kreissektoren vom Flächeninhalte $\frac{1}{2}R^2 d\varphi$. Bildet man das Integral $\frac{1}{2}\int R^2 d\varphi$, so stellt dieses den Inhalt der betrachteten Fläche dar, indem man bei Berücksichtigung des Vorzeichens von $d\varphi$ übersieht, daß die außerhalb der begrenzten Fläche gelegenen Teile zweimal mit verschiedenem Vorzeichen auftreten. Es ist daher für eine beliebige Fläche

$$a\int d\sigma = \tfrac{1}{2}\int R^2 d\varphi - C^2\int d\varphi,$$

oder wenn wir

$$\tfrac{1}{2}\int R^2 d\varphi = F$$

setzen,

$$F = a(\sigma_2 - \sigma_1) + C^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

φ_2 und φ_1 sind die den Stellungen des Polarms am Anfang und Ende der Umfahrung entsprechenden Winkel mit einer beliebig gewählten Anfangsrichtung. Kehrt der Polarm bei vollständiger Umfahrung von F in seine Anfangslage zurück, so ist wegen $\varphi_2 = \varphi_1$ das letzte Glied Null. Liegt der Pol aber innerhalb der auszumessenden Figur, so wird der Polarm nach Umfahrung derselben einen vollen Umlauf um den Pol gemacht haben und

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$$

werden. In diesem Falle ist

$$F = a(\sigma_2 - \sigma_1) + C^2\pi.$$

$C^2\pi$ ist aber die Fläche des Grundkreises, die demnach zu der mit der Fahrarmlänge multiplizierten Ablesungsdifferenz der Rolle addiert werden muß, wenn der Pol im Innern liegt.

Ein Mangel des gewöhnlichen Polarplanimeters ist die Bewegung der Rolle auf der Planunterlage, so daß infolge kleiner Unebenheiten ein unregelmäßiges Abwälzen erfolgt.[1]) Dieser Mangel

1) Dieser Mangel ließe sich einfach dadurch beseitigen, daß man die Meßrolle auf einem nicht zu breiten Kreisringstück (von etwa

ist beim Präzisionsplanimeter behoben, indem die Rolle auf einer Scheibe läuft. Die älteste Konstruktion von Hohmann und Coradi hatte eine senkrecht stehende Scheibe, gegen welche die Meßrolle gedrückt wurde. Da hierbei keine genügende Sicherheit des Rollens gewährleistet war, so wurde bei einer zweiten Konstruktion die Scheibe schräg gestellt.

In der Verlängerung des Polarms (Fig. 55) ist die schiefliegende Achse einer Laufrolle L angebracht, die daher bei der Drehung des Instrumentes einen Kreisbogen um den Pol P beschreibt. Auf derselben Achse sitzt die kreisförmige Scheibe S, welche ebenfalls schief und parallel zur Laufrolle steht. Senkrecht zum Fahrarm a ist in dem Drehpunkte O, der Fahrarm und Polarm verbindet, ein kurzer Arm c angebracht, welcher einen die Meßrolle tragenden Schlitten in der zum Polarm $PL = l$ senkrechten Richtung verschiebt, so daß die Verschiebung der Meßrolle in dem zum Schlitten parallelen (horizontalen) Durchmesser der Scheibe stattfindet, wenn der Fahrarm sich um O dreht.

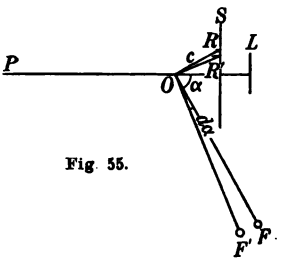


Fig. 55.

Ist α der Winkel des Fahrarms mit der Verlängerung OL des Polarms PO, so ist $\delta = c \cos \alpha$ der Abstand der Rolle vom Mittelpunkt der Scheibe und bei einer Drehung des Fahrarms um $d\alpha$ verschiebt sich der Berührungspunkt der Rolle um $d\delta = -c \sin \alpha d\alpha$. Beschreibt der Fahrstift einen Kreisbogen mit dem Radius r um P, so ist $r^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$. Der Winkel, um den sich sowohl r als der Polarm dreht, sei $d\psi$, dann wickelt die schief stehende Laufrolle mit dem Radius L, da ihr Berührungspunkt mit der Unterlage den Bogen $l d\psi$ beschreibt, den Bogen $L d\lambda = l d\psi$ ab. $d\lambda = \frac{l}{L} d\psi$ ist der Drehungswinkel der Laufrolle und gleichzeitig auch der Scheibe. Daher ist $\delta d\lambda = \delta \frac{l}{L} d\psi$ die Bogenstrecke, um die der Berührungspunkt der Integrierrolle auf der Scheibe weiterrückt und die Abwicklung der Integrierrolle ist

120° Winkelgröße) laufen ließe, das etwa nur durch eine bei 60° gelegte radiale Schiene mit dem Pole verbunden wäre. Das Instrument könnte so gebaut sein, daß das Gelenk zwischen Pol- und Fahrarm möglichst über dem Stützpunkt der Rolle läge, wodurch die überflüssigen Bewegungen der Rolle auf ein Minimum beschränkt würden.

$$d\sigma = \varrho d\omega = \delta d\lambda$$

oder mit Einführung von $p = c\frac{l}{L}$

$$d\sigma = p \cos \alpha d\psi.$$

Während bei diesem Planimeter die schrägstehende Rolle die Drehung des Polarmes um den Pol auf die Scheibe überträgt, wird bei einer zweiten Konstruktion von Hohmann-Coradi die Drehung der Scheibe dadurch hervorgebracht, daß ein unter ihrem Mittelpunkt sitzendes Triebrad an dem geriffelten Rande einer den Pol umgebenden kreisrunden Polplatte entlang läuft. Die Ausführung ist in zwei verschiedenen Arten erfolgt.

Bei dem freischwebenden Präzisionsplanimeter ist im Mittelpunkte der geriffelten Polplatte P eine vertikale Achse eingesteckt. Der an einem Ende gabelförmige Polarm umfaßt mit der Gabel die Polachse und wird durch eine von der oberen Spitze der Polachse nach seinem anderen Ende gehenden Lamelle getragen. Am Polarm ist die vertikale Achse einer an der Riffelung der Polplatte entlang laufenden Laufrolle L angebracht. Über L sitzt auf derselben Achse die mit Papier überzogene Hartgummischeibe S (vgl. Fig. 56). Am anderen Ende des Polarms ist um eine Vertikalachse drehbar die Hülse angebracht, in der sich der Fahrarm verschieben läßt, der mit einer Teilung (in halbe Millimeter) versehen, mit Hilfe eines Nonius auf eine gewünschte Länge eingestellt und mit einer Klemmschraube festgeklemmt werden kann.

Mit der Hülse steht ein Rahmen in fester Verbindung, der die auf der Scheibe aufliegende Meßrolle trägt, deren Achse dem Fahrarm parallel ist. Wenn der Fahrarm und Polarm senkrecht zu einander stehen, soll die Berührung im Scheibenmittelpunkt stattfinden. Die Bewegung des Fahrarms allein hat, da die Rollenebene senkrecht zu ihm steht, eine nur gleitende Bewegung der Meßrolle zur Folge; denn der Arm, welcher die Meßrolle trägt, dreht sich um den Drehpunkt der Hülse, und der Berührungspunkt beschreibt einen Kreis um diesen Drehpunkt. Wird dagegen der Polarm bewegt, so setzt sich die Scheibe in drehende Bewegung und diese überträgt sich auf die Meßrolle, die z. T. gleitende, z. T. rollende Bewegungen ausführt, deren Größe von ihrer Lage zum Mittelpunkt der Scheibe abhängt.

Sei wieder $d\psi$ die Drehung des Polarms, P der Halbmesser der Polscheibe, L derjenige der Laufrolle, $d\lambda$ ihr Drehungswinkel,

so ist $Pd\psi = Ld\lambda$. $d\lambda$ ist zugleich der Drehungswinkel der Scheibe, und wenn die Meßrolle den Abstand δ vom Scheibenmittelpunkt hat und α der Winkel ist, den der Fahrarm mit der Verlängerung des Polarms, ferner β der Winkel, den der Radius δ mit der Richtung des Polarms einschließt, so ist die Abwicklung der Meßrolle $d\sigma = \delta d\lambda \cos(\alpha - \beta)$. Ist c die Entfernung des Scheibenmittelpunktes vom Drehpunkt des Fahrarms, so ist $\delta \cos(\alpha - \beta) = c \cos\alpha$ oder wenn wir $c \frac{P}{L} = p$ setzen,

$$d\sigma = p d\psi \cos\alpha.$$

Es möge hier gleich bemerkt werden, daß dieses Instrument für die Lage des Pols im Innern einer Figur nicht eingerichtet ist, und daß nur ein Teil des Umfanges der Polplatte geriffelt ist.

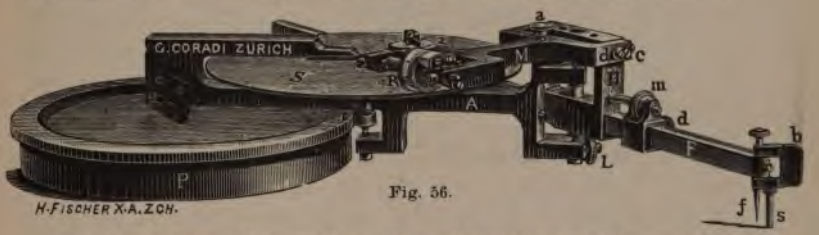


Fig. 56.

Bei der anderen Konstruktion (Fig. 56) ist die Aufhängevorrichtung weggelassen und durch eine Tragrolle L ersetzt, die so angebracht ist, daß das Übergewicht des Instrumentes auf der Seite des Fahrstifts liegt. Dieses als einfaches Präzisionsplanimeter bezeichnete Instrument ist nur in kleinen Dimensionen ausgeführt und eignet sich also nur zur Ausmessung von kleineren Flächen.

Bei der dritten Klasse von Planimetern von Hohmann-Coradi, den Kugelpolarplanimetern, ist die Scheibe durch eine Kugelfläche mit horizontaler Drehachse ersetzt. An die Stelle der Meßrolle tritt eine zylindrische Integrierwalze, welche gegen die Kugelfläche gedrückt wird.

Beim einfachen Kugelpolarplanimeter läuft die am Ende des Polararms angebrachte Kugelschale auf der Zeichenunterlage, beim freischwebenden Kugelpolarplanimeter ist unterhalb des Polarms, durch ein Gegengewicht ausbalanziert, eine ihm parallele Achse mit der Kugelkalotte am Ende angebracht. Diese Achse wird durch ein auf dem fein gezahnten Rande der Polplatte laufendes Rädchen in Umdrehung versetzt. Am an-

deren Ende des Polarmbügels befindet sich die um eine vertikale Achse drehbare Hülse, die den verschiebbaren Fahrarm aufnimmt; der Fahrarm trägt den Rahmen für die durch eine Feder an die Kugel gedrückte Zylinderwalze, deren Achse dem Fahrarm parallel ist (vgl. Fig. 53).

Bei diesem Planimeter ist wiederum eine völlige Unabhängigkeit der Meßvorrichtung von den Unebenheiten der Unterlage gewährleistet. Durch die Verwendung der Kugelfläche ist außerdem ein Gleiten der Integrierwalze ausgeschlossen. Wird bei festgehaltenem Polarm der Fahrarm gedreht, so erfolgen nur ganz geringe Drehungen des Zylinders, insofern dieser die Kugel nicht ganz genau im größten Horizontalkreis berührt und nicht genau horizontal liegt. Diese sind aber bei geschlossenen Figuren einflußlos (siehe S. 97). Die Drehung des Polarms hat dagegen eine Drehung der Kugelfläche zur Folge, welche nur dann keine Drehung der Integrierwalze verursacht, wenn diese die Kugel im Endpunkt ihrer Umdrehungsachse berührt, d. h. wenn der Fahrarm zum Polarm senkrecht steht, das Instrument sich also in seiner Grundstellung befindet. Je weiter der Berührungspunkt von diesem Kugelpol abliegt, um so größere Drehungen erleidet die Walze.

Bildet der Fahrarm mit dem verlängerten Polarm den Winkel α, so berührt der Zylinder die Kugel in einem Punkte des Horizontalkreises der Kugel, dessen Radius mit dem Polarm (oder mit der Umdrehungsachse der Kugel) den Winkel $90^0 - \alpha$ einschließt, da die Zylinderachse dem Fahrarm parallel ist. Bei der Drehung der Kugel beschreibt der Berührungspunkt auf ihr einen kleinen, zur Umdrehungsachse senkrechten Kreis, dessen Radius daher $R\cos\alpha$ ist, wenn mit R der Kugelradius bezeichnet wird.

Beschreibt der Fahrstift F einen kleinen Kreisbogen, so beschreibt der Leitstrahl und ebenso der Polarm (dessen Stellung zum Fahrarm in diesem Falle unverändert bleibt) einen Winkel $d\psi$. Die Rolle mit dem Radius L rollt an dem Bogenstück $Pd\psi$ der kreisförmigen Polplatte mit dem Radius P entlang und dreht sich um einen Winkel $d\lambda$, der durch $Pd\psi = Ld\lambda$ bestimmt ist. Um denselben Winkel $d\lambda$ dreht sich aber die auf derselben Achse sitzende Kugelschale, also legt ein Punkt des Berührungskreises auf der Kugel den Weg $R\cos\alpha d\lambda$ zurück, dem die Abwicklung des Zylinders $d\sigma = \varrho d\omega$ gleich ist (ϱ Zylinderradius, $d\omega$ sein Drehungswinkel). Man erhält also, wenn noch $R\frac{P}{L} = p$ gesetzt

wird und der Fahrstift einen Kreisbogen um den Pol beschreibt,

$$d\sigma = p \cos\alpha d\psi.$$

Wir sehen also, daß bei allen diesen Planimetern für die an einem besonderen Zählapparat abgelesenen Umdrehungen der Rolle oder des Zylinders dieselbe Formel gilt, und daß nur der konstante, von den Dimensionen abhängige Faktor p je nach der besonderen Anordnung verschieden ist.

Wenn nun der Fahrstift einen beliebigen kleinen Weg FF_2 zurücklegt, bei dem der Leitstrahl $PF = r$ einen kleinen Winkel $d\varphi$ überstreicht, so denken wir uns den Weg in zwei Teile FF_1 und F_1F_2 zerlegt (Fig. 57.). Der erste Teil wird durch die Bewegung des Polarms allein durchlaufen, indem FF_1 ein Teil eines Kreisbogens ist, wobei die gegenseitige Lage von Polarm und Fahrarm unverändert bleibt. Das ganze Instrument, also auch der Polarm wird um den Winkel $d\psi$ herumgeschwenkt. Der zweite Teil der Bewegung, F_1F_2, wird durch Drehung des Fahrarms für sich hervorgebracht und der Leitstrahl PF überstreicht einen Winkel $d\gamma$. Der ganze bei der Bewegung des Fahrstifts von F bis F_2 vom Leitstrahl überstrichene Winkel ist dann $d\varphi = d\psi + d\gamma$.

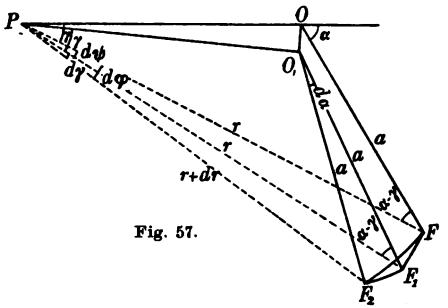


Fig. 57.

Den Winkel $d\psi$ erhalten wir, wie wir gesehen haben, durch die Rollenabwicklung $d\sigma$. Es kommt nun noch darauf an $d\gamma$ durch $d\alpha$, den Winkel, um den sich der Fahrarm dreht, auszudrücken. Wendet man auf das Dreieck POF, dessen drei Winkel γ, $180^0 - \alpha$ und $\alpha - \gamma$ sind (da wir γ von der Anfangslage des Polarms aus zählen dürfen), eine bekannte Differentialformel an, so erhält man

$$r d\gamma = \sin(\alpha - \gamma) da - \sin\gamma db - a\cos(\alpha - \gamma) d\alpha$$

oder da a und b konstante Längen sind, und $-\cos(\alpha - \gamma) = \frac{b^2 - a^2 - r^2}{2ar}$ ist,

$$d\gamma = \frac{b^2 - a^2 - r^2}{2r^2} d\alpha.$$

Hiermit ergibt sich also

$$d\varphi = d\psi + d\gamma = \frac{d\sigma}{p\cos\alpha} + \frac{b^2 - a^2 - r^2}{2r^2}\,d\alpha$$

und, mit Rücksicht auf

$$\cos\alpha = \frac{r^2 - a^2 - b^2}{2ab} \quad \text{und} \quad r^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha,$$

$$d\sigma = \frac{p}{a\,b}\,\frac{r^2}{2}\,d\varphi - \frac{a^2 + b^2}{2ab}\,p\,d\varphi + \frac{a^2 + ab\cos\alpha}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}\,p\cos\alpha\,d\alpha.$$

Bei der Integration über eine geschlossene Figur fallen die beiden letzten Integrale fort, weil die Grenzen gleich werden. Das erste, $\frac{1}{2}\int r^2 d\varphi$, ist aber dem Inhalt F der umfahrenen Fläche gleich, und diese ist mithin der Abwicklung der Rolle bis auf einen konstanten Faktor gleich. Dieser Faktor $\frac{a\,b}{p}$ ist also der Wert der Noniuseinheit, d. h. die Fläche, welche $\sigma_2 - \sigma_1 = 1$ entspricht.

Liegt der Pol innerhalb, so wird das zweite Integral nicht null, sondern es ist

$$F = \frac{a\,b}{p}\,(\sigma_2 - \sigma_1) + (a^2 + b^2)\pi.$$

Der Kreis mit dem Radius $\sqrt{a^2 + b^2}$, dessen Fläche bei „Pol innen" zur abgelesenen Fläche hinzugefügt werden muß, und der vom Fahrstift bei senkrechter gegenseitiger Stellung von Fahrarm und Polarm beschrieben wird, heißt Ordinatenkreis.[1])

1) Fehlereinflüsse: Die Integrierrolle soll bei senkrechter Stellung von Polarm und Fahrarm die Scheibe bzw. Kugelkalotte im Mittelpunkt berühren.

Ist diese Bedingung nicht streng erfüllt, so ist bei außerhalb der Figur liegendem Pol der Fehler einflußlos. Wenn nämlich $c\cos\alpha + \Delta$ an Stelle von $c\cos\alpha$ tritt, d. h. der Rollenberührungspunkt, der einen Kreisbogen um den Drehpunkt des Fahrarms beschreibt, bei der Grundstellung $\alpha = 90^0$ den Bogenabstand Δ statt 0 hat, so wird

$$d\sigma = p'(c\cos\alpha + \Delta)\,d\psi = p'(c\cos\alpha + \Delta)(d\varphi - d\gamma)$$

$$= p'\Big[\frac{c}{a\,b}\,\frac{r^2}{2}\,d\varphi - c\,\frac{a^2 + b^2}{2ab}\,d\varphi + \Delta\,d\varphi + (c\cos\alpha + \Delta)\,\frac{a^2 + ab\cos\alpha}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}\,d\alpha\Big].$$

Bei Umfahrung einer geschlossenen Fläche bleibt also bei „Pol

Die Genauigkeit der verschiedenen Planimeter ist durch Bestimmung des mittleren Umfahrungsfehlers ermittelt worden.[1]) Hierbei wurde der Flächeninhalt $F = nf$ gesetzt, indem mit n die Anzahl der Umdrehungen der Meßrolle bezeichnet wurde, also f der Flächenwert ist, welcher einer Umdrehung der Meßrolle entspricht. Es ergab sich für das

Linearplanimeter	$dF = 0{,}00081f + 0{,}00087\sqrt{Ff}$
Polarplanimeter	$0{,}00126f + 0{,}00022\sqrt{Ff}$
Präzisionsplanimeter (einf.)	$0{,}00056f + 0{,}00084\sqrt{Ff}$
„	$0{,}00069f + 0{,}00018\sqrt{Ff}$
freischwebendes Planimeter	$0{,}00060f + 0{,}00026\sqrt{Ff}$

woraus die Überlegenheit der beiden zuletzt genannten Planimeter hervorgeht (man kann auch $\sqrt{Ff} = \frac{F}{\sqrt{n}}$ einsetzen).

Das Polarplanimeter ist, wie es scheint, das einzige Plani-

außerhalb" $\sigma_2 - \sigma_1 = p' \frac{c}{ab} F$, indem die anderen Integrale fortfallen, wenn die Grenzen gleich werden. Für „Pol innerhalb" folgt $\sigma_2 - \sigma_1 = p'\left(\frac{c}{ab}F - c\frac{a^2+b^2}{ab}\pi + 2\Delta\pi\frac{c}{ab}\right)$, und das letzte Glied gibt daher den Fehlereinfluß an.

Von den übrigen Bedingungen ist die wichtigste, daß die Rollenachse und der Fahrarm parallel sind. Ist dies nicht streng der Fall, sondern ein kleiner Winkel ε vorhanden, so tritt $c\cos(\alpha + \varepsilon)$ an Stelle von $c\cos\alpha$ und es ist mit genügender Annäherung $d\sigma = p'(c\cos\alpha - c\varepsilon\sin\alpha)d(\varphi - \gamma)$. Dadurch tritt zu dem Flächenintegral noch ein Integral von der Form $\frac{p'c\varepsilon}{2ab}\int \sin\alpha\, d\varphi$ hinzu, das wegen

$$\sin\alpha = \frac{1}{2ab}\sqrt{4a^2b^2 - (r^2 - a^2 - b^2)}$$

über eine Funktion $\Gamma(r)$ des Radiusvektors sich erstreckt. Die Anzahl der Rollenumdrehungen ist daher nicht der Fläche proportional, sondern auch vom Leitstrahl, also von der Lage des Pols abhängig. Um daher das Planimeter in dieser Beziehung zu prüfen, ist eine Umfahrung der gegebenen Figur bei verschiedenen Polstellungen nötig. Ferner wird aus zwei Umfahrungen mit symmetrischer Polstellung dieser Fehler eliminiert (s. d. f.).

1) Österreichische Zeitschrift für Berg- und Hüttenwesen, 1883.

meter, das sich mit geringer Abänderung zur Flächenbestimmung auf einer nicht abwickelbaren Oberfläche, insbesondere auf der Kugelfläche verwenden läßt. Die hauptsächlichste Änderung besteht darin, daß sowohl der Polarm als der Fahrarm eine Art Knick (oder verstellbares Horizontalgelenk j und j' Fig. 58) haben, so daß der Pol- und Fahrstift einerseits, die Rolle andererseits die Kugel berühren können. An Stelle der Bedingung, daß die

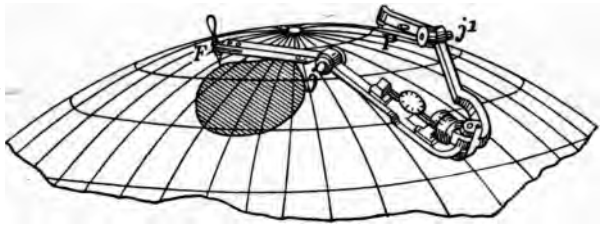


Fig. 58.

Rollenachse dem Fahrarm parallel ist, tritt die andere, daß ihre Richtung immer durch den Fahrstift geht.

41. Kompensations-Polarplanimeter. Wenn die Achse der Meßrolle dem Fahrstab nicht genau parallel ist (Fig. 59), so entsteht ein Fehler, der sich aber durch zwei Umfahrungen der Figur bei symmetrischer Stellung des Pols zum Fahrstab eliminieren läßt. Dabei kann entweder die Verbindungslinie Pol-Fahrstift mit Beibehaltung ein und derselben Polstellung oder der Fahrarm bei zwei verschiedenen Polstellungen Symmetrieachse sein. Zu diesem Zwecke ist das Kompensationspolarplanimeter konstruiert, welches ein Durchschlagen des Fahrarms gestattet, d. h. der Fahrarm kann unter dem Polarm hindurchgeführt werden (Fig. 60). Es ist damit zugleich der Vorteil verbunden, daß das Instrument auseinander genommen werden und seine beiden Arme für sich aufbewahrt werden können. Die Verbindung zwischen beiden Armen wird durch

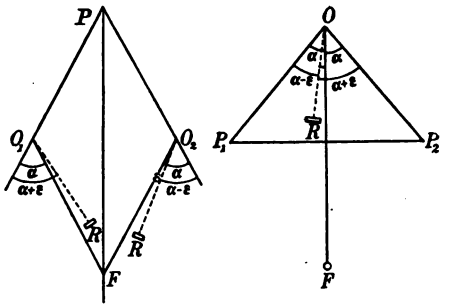


Fig. 59.

ein Kugelgelenk hergestellt, indem eine am Polarm befindliche polierte Stahlkugel in eine Öffnung im Fahrarm hineingelegt wird. Hierdurch wird zugleich die sog. Scharnierschiefe vermieden, welche bei fester Verbindung der beiden Arme dadurch entsteht, daß die Projektionen

Fig. 60.

der beiden Endpunkte des Scharniers, nämlich des im Polarm und des im Fahrarm liegenden, in der Zeichenebene nicht zusammenfallen (s. S. 86). Die einzelnen Konstruktionen unterscheiden sich dadurch, daß bei den feineren Kompensationsplanimetern die Länge des Fahrarms verstellbar ist, und daß die Rollenachsenlage korrigiert werden kann.

42. Verschiedene andere Planimeter mit Integrierrolle. Kombiniertes Planimeter von F. Kloht. Ein Übelstand beim einfachen Polarplanimeter ist der Wechsel der Lage der Meßrollenachse zur Bewegungsrichtung, ein anderer Nachteil, daß seine Empfindlichkeit bei kleinen Flächen zu gering ist und eine Verkürzung des Fahrarms die Umfahrungsgrenze zu sehr einschränkt, was besonders bei langgestreckten Figuren stören würde. Hierdurch war Veranlassung gegeben, ein Planimeter zu konstruieren, welches eine Art Kombination des Polarplanimeters und des Wetli-Hansenschen Planimeters darstellt, dessen bereits erwähnte Nachteile ebenfalls vermieden werden sollen.

Ein durch Gewicht genügend beschwerter Kreissektor von etwa 90^0 Zentriwinkel (Fig. 61) hat einen hohen, außen unter 45^0 abgeschrägten Rand, an dem eine mit dem Polarm verbundene Scheibe bei seiner Bewegung durch Reibung rotiert (vgl. Fig. 56). Diese horizontale Scheibe ist mit einer größeren zentrisch über ihr parallel liegenden fest verbunden. Der Polarm PD, der durch ein angeschraubtes Kniestück das untere Lager der Scheibenachse trägt, liegt über der oberen Scheibe und trägt ein Ansatzstück für das obere konische Achsenende. Der Fahrarm ist durch ein Gelenkparallelogramm $ABCD$ ersetzt, dessen dem Polarm parallele, mit einer Teilung ver-

sehene Seite BC den an ihr verschiebbaren und festzustellenden Fahrstift F trägt. Es sei noch erwähnt, daß das freie Ende des Polarms auf einer Stützrolle aufliegt und daß die den Fahrstift tragende Parallelogrammseite an beiden Enden Führungsgriffe besitzt. Ein Winkelstück BRC, das an dieser Seite befestigt ist, hält in seinem Scheitelpunkte den die Meßrolle R tragenden Schlitten, so daß bei einer Bewegung des Parallelogramms bzw. des Fahrstifts die Meßrolle längs des Polarms hin- und hergleitet.

Wird der Fahrstift durch ein Linienelement FF_2 geführt, so können wir diese Bewegung in zwei Teilen FF_1 und F_1F_2 vollzogen denken (vgl. Fig. 57). Bei der ersten Bewegung beschreibe F einen Kreisbogen um den Pol, dann bleibt das Parallelogramm unverändert und der Polarm überstreicht denselben Winkel $d\psi$, wie der Leitstrahl r.[1]) Der zweite Teil der Bewegung wird durch die Bewegung des Parallelogramms hervorgebracht, während der Polarm in Ruhe bleibt; der vom Leitstrahl überstrichene Winkel sei $d\gamma$, und $d\varphi = d\psi + d\gamma$ der der ganzen Bewegung FF_2 entsprechende Winkel am Pol P. Wir bezeichnen die Entfernung vom Pol P bis zum Schnittpunkt E einer durch F zu den Parallelogrammseiten AB und DC gelegten Parallelen mit b und setzen die Länge der Parallelen $FE = AB = DC = a$. Es sei der Winkel des Parallelogramms bei A oder auch $FED = \alpha$. Nur bei der Führung des Fahrstifts längs $FF_1 = rd\psi$ findet eine Drehung der Scheibe statt, indem die kleine Friktionsscheibe mit dem Radius l sich um einen Winkel $d\lambda$ dreht, der durch ihr Rollen an dem Polsektor bestimmt ist. Ist P der Radius des Polsektors, so rollt die Scheibe bei der Drehung des Polarms um $d\psi$ längs des Bogens $Pd\psi$ und es ist $Ld\lambda = Pd\psi$. Die große Scheibe dreht sich um denselben

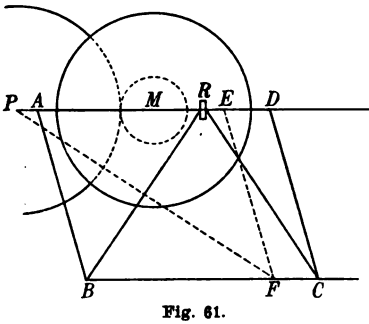


Fig. 61.

1) Es seien FF' zwei benachbarte Punkte und $PF = PF'$ und es werde E bei der Bewegung von F nach E' übergeführt. Nun ist $PE = PA + AE = PA + BF$ konstant, also $PE' = PE$. Da auch $EF = E'F' = AB = DC$ ist, so erhalten wir Winkel $EPF = E'PF'$.

Winkel $d\lambda = \frac{P}{L} d\psi$. Wenn die Meßrolle in der Grundstellung des Instruments, in der das Parallelogramm zu einem Rechteck wird ($\alpha = 90^0$), den Abstand δ vom Mittelpunkte der Scheibe hat, so hat sie bei einer anderen Stellung des Parallelogramms den Abstand $\delta + a\cos\alpha$ (da ja ihre Entfernung vom Fußpunkt eines von F auf AB gefällten Perpendikels konstant bleibt und dieser Fußpunkt sich um $a\cos\alpha$ verschoben hat). Daher ist die Abwicklung der Meßrolle

$$(\delta + a\cos\alpha) d\lambda = (\delta + a\cos\alpha) \frac{P}{L} d\psi = d\sigma.$$

Wenn wir $d\psi = d\varphi - d\gamma$ einsetzen, so wird mit Rücksicht auf $\cos\alpha = \frac{r^2 - a^2 - b^2}{2ab}$

$$d\sigma = \frac{P}{L}\left(\frac{1}{b}\frac{r^2}{2} d\varphi - \left[\frac{a^2}{2b} + \frac{b}{2}\right] d\varphi + \delta d\varphi - (\delta + a\cos\alpha) d\gamma\right).$$

Um $d\gamma$ durch $d\alpha$ auszudrücken, gehen wir auf Fig. 57 zurück, indem PO und PO_1 die beiden Lagen des Polarms sind, und der Winkel γ von der Lage PO_1 ab gerechnet wird. Dann ist

$$a^2 = b^2 + r^2 - 2br\cos\gamma$$

also $d\gamma = \frac{b\cos\gamma - r}{br\sin\gamma} dr$ und wegen $r dr = -ab\sin\alpha d\alpha$

$$-d\gamma = \frac{b\cos\gamma - r}{r^2\sin\gamma} a\sin\alpha d\alpha.$$ [1])

Es ist ferner

$$a\sin\alpha = r\sin\gamma$$

und

$$r\cos\gamma = b + a\cos\alpha$$

oder

$$b\cos\gamma - r = \frac{b^2 - r^2 + ab\cos\alpha}{r}$$

und

$$r^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$$

also

$$d\gamma = \frac{a^2 + ab\cos\alpha}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha} d\alpha.$$

1) Die Herleitung ist absichtlich etwas verschieden von derjenigen auf S. 107, die ebenso gut angewandt werden konnte.

Denken wir uns diesen Ausdruck eingesetzt und integriert, so verschwinden für eine geschlossene Figur alle Integrale mit Ausnahme des ersten, welches den Flächeninhalt gibt, nämlich

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{P}{Lb}\int \frac{r^2}{2}\, d\varphi.$$

Das Panintegrimeter von Kohlmorgen, das auch die Messung von Kurvenlängen umfaßt, bezweckt in erster Linie die Ausmessung von Flächenstücken insbesondere bei Wasserprofilen, meteorologischen Aufzeichnungen u. dgl. Dieser besondere Zweck kommt nur insofern in Betracht, als die Abszissen bei der Stationierung der Flußprofile und bei den nach der Zeit angestellten Beobachtungen in einem Sinne fortschreiten. Soll z. B. die von dem Kurvenstück FF' begrenzte Fläche ausgemessen werden (Fig. 62), so kann man diese in folgender Weise zerlegen.

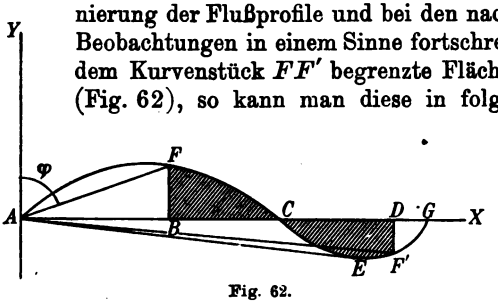


Fig. 62.

Wir unterscheiden: 1. die vom Leitstrahl überstrichene Fläche mit der Anfangslage AF und der Endlage AE, die positiv gerechnet wird, insofern der Leitstrahl sich im Sinne des Uhrzeigers um A dreht, 2. die vom Leitstrahl von der Anfangslage AE bis zur Endlage AF' überstrichene Fläche, die negativ gerechnet wird, weil der Leitstrahl entgegengesetzt der Uhrzeigerbewegung sich dreht, 3. die von der Ordinate y_1 und Abszisse x_1 des Anfangspunktes F begrenzte Dreiecksfläche ABF, die positiv $\frac{x_1 y_1}{2}$ ist, und 4. die von der Ordinate y_2 und der Abszisse x_2 des Endpunktes F' begrenzte Dreiecksfläche $\frac{x_2 y_2}{2}$, die negativ gezählt wird, weil y_2 negativ ist. Wir erhalten im ganzen für die betrachtete (schraffierte) Fläche

$$(ACF + ACE - AEF') - (ABF - ADF')$$

$$= \frac{1}{2}\int \varrho^2 d\varphi - \frac{x_1 y_1}{2} + \frac{x_2 y_2}{2} = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho^2 d\varphi + \frac{1}{2}(x_2 y_2 - x_1 y_1) = \int_{x_1}^{x_2} y\, dx.$$

Wir erhalten das auch leicht allgemein, wenn wir von dem Ausdruck des Flächenelements

$$dF = \frac{1}{2}(y\,dx - x\,dy) = y\,dx - d\left(\frac{xy}{2}\right)$$

ausgehen und

$$y = \varrho\cos\varphi, \qquad x = \varrho\sin\varphi$$

einführen. Es ist

$$y\,dx = \varrho^2\cos^2\varphi\,d\varphi + \varrho\sin\varphi\cos\varphi\,d\varrho$$

$$x\,dy = -\varrho^2\sin^2\varphi\,d\varphi + \varrho\sin\varphi\cos\varphi\,d\varrho$$

also

$$y\,dx - d\left(\frac{xy}{2}\right) = \frac{1}{2}\varrho^2 d\varphi$$

daher

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \left|\frac{xy}{2}\right|_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} + \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\varrho^2 d\varphi\,.$$

Das Planintegrimeter mißt nun $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\varrho^2 d\varphi$. Es besteht im wesentlichen (Fig. 63) aus vier Stäben $MO = OF = a$, $AP = BP = \frac{a}{2}$, die in O, A und B durch Gelenke verbunden sind, wobei A und B die Mitten von OM und OF sind. In F befindet sich der Fahrstift, in P der Pol, so daß die gedachte Verbindung $PF = \varrho$ den Leitstrahl vorstellt. Es ist nun noch ein Arm $PL = \lambda$ senkrecht zu AP, in fester Verbindung damit, angebracht, der also auch zu OF senkrecht steht, so daß $\varrho^2 = 2a\lambda$ und $\frac{1}{2}\varrho^2 d\varphi = a\lambda\,d\varphi$ ist. Die Verschiebung von L auf dem Arm OF, der in einem Schlitz den bei L angebrachten Stift führt, überträgt sich durch einen Seilzug, der über BOP geht, auf eine Rolle R, die sich infolge dessen in der Richtung OP um $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$ verschiebt. Um die Abwälzung der Rolle von der Unterlage unabhängig zu machen, liegt sie auf

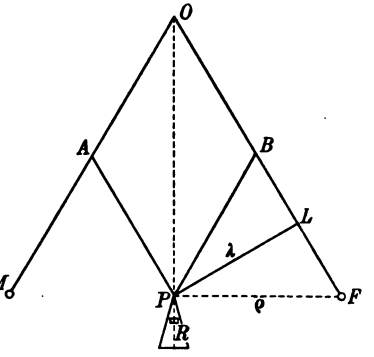


Fig. 63.

einer Kegelfläche auf und verschiebt sich auf ihr längs einer horizontal liegenden Mantellinie. Wenn PF sich um den Winkel $d\varphi$ um P dreht, so dreht sich auch OR um P um $d\varphi$, denn das Dreieck FPO ist vor und nach der Drehung ein rechtwinkliges.[1]) Die Kegelfläche rollt bei dieser Drehung von OR auf ihrem Grundkreise, während die Kegelspitze die Höhe z über der Zeichenebene hat. Ist s die Länge der Mantellinie, so ist der Weg, den der Berührungspunkt des Grundkreises beschreibt $\sqrt{s^2 - z^2} \cdot d\varphi$. Ist ferner α der halbe Öffnungswinkel des Kegels, so dreht er sich um seine Achse um einen Winkel $d\psi$, der durch $s \sin\alpha d\psi = \sqrt{s^2 - z^2} d\varphi$ berechnet wird. Die Rolle berührt den Kegel in der Entfernung λ' von der Kegelspitze, mithin ist $d\sigma = \lambda' \sin\alpha d\psi$ ihre Abwicklung. Man erhält schließlich:

$$\frac{1}{2}\varrho^2 d\varphi = a\lambda d\varphi = an\lambda' \frac{s\sin\alpha}{\sqrt{s^2 - z^2}} \frac{d\sigma}{\lambda' \sin\alpha}$$

oder wenn $\frac{ans}{\sqrt{s^2 - z^2}} = k$ gesetzt wird, wo k eine Konstante ist, so ergibt sich

$$\frac{1}{2}\int \varrho^2 d\varphi = k d\sigma.$$

Für die anderen Zwecke, denen das Instrument noch dient, sind in M und am Stabe OF ebenfalls Rollen angebracht.

Wir gehen nicht auf das Bryandsche Planimeter für Diagramme mit veränderlichem Maßstab ein, da seine Theorie nichts wesentlich neues bietet und die praktische Herstellung der dafür nötigen Führungskurven einige Schwierigkeit macht.

Einige Andeutungen über ein Planimeter von Adolf Schmidt in Potsdam zur Ausmessung registrierter Kurven mögen noch Platz finden. Der ausgeführte Apparat ist speziell für Aufzeichnungen der magnetischen Elemente am Potsdamer Observatorium eingerichtet, läßt sich aber leicht für andere Zwecke abändern. Die Kurven werden auf einem Papierbogen erhalten, der um einen Zylinder gewickelt ist, der sich durch ein Uhrwerk in einem bestimmten Zeitintervall, z. B. in einem Tage einmal um seine Achse dreht. Die in gleichen Abständen gezogenen Linien längs der Erzeugenden des Zylinders teilen dieses Intervall z. B. in Stunden.

1) $PF^2 + PO^2 = PB^2 + BF^2 + PB^2 + BO^2 = a^2$.

Eine Linie senkrecht zu den Erzeugenden etwa am Ende des Zylinders (der Grundkreis) stellt die Nulllinie oder Abszissenachse für die Kurven dar. Es handelt sich nun im vorliegenden Falle darum, den mittleren Ordinatenwert y_m für ein bestimmtes Abszissenintervall $x_2 - x_1$, also z. B. für ein Stundenintervall zu ermitteln, so daß $y_m(x_2 - x_1) = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx$ oder $y_m = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} y\,dx$ ist.

Zu diesem Zwecke ist ein Wagen auf einer dem horizontal gelegten Zylinder parallelen Laufschiene angeordnet, der den Fahrstift trägt, den man auf den Kurvenpunkt einstellt. Er ist durch eine ebenfalls dem Zylinder parallele Stange mit einer Meßrolle verbunden, die bei einer Verschiebung des Stifts in der Ordinatenrichtung (durch Bewegung des Wagens) längs dem Durchmesser einer horizontalen Kreisscheibe gleitet. Die Achse der Rolle ist dem Durchmesser, ebenso der Zylinderachse, parallel. Diese horizontale Scheibe und der Zylinder werden durch eine Kurbel in gleichzeitige Umdrehung versetzt, so daß vollständige Umdrehungen beider zusammenfallen (oder wie im vorliegenden Falle proportional sind). Die Lage der Rolle, bei der ihr Berührungspunkt im Mittelpunkt der Scheibe liegt, entspricht der Stellung $y = 0$ des Fahrstifts. Dreht sich die Scheibe um den Winkel $d\varphi = p\,dx$, wo $p = 1$ (oder ein konstanter Proportionalitätsfaktor) ist, und hat der auf den Kurvenpunkt eingestellte Fahrstift die Ordinate y, so hat auch die Rolle den Abstand y vom Mittelpunkt der Scheibe und wickelt $d\sigma = p\,y\,dx$ ab. Für die Drehung des Zylinders um $x_2 - x_1$ und die entsprechende Drehung $p(x_2 - x_1)$ der Scheibe erhält man

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx \quad \text{und} \quad y_m = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{x_2 - x_1}.$$

Aus praktischen Gründen ist die Nullstellung des Fahrstifts in der Mitte des Zylinders gewählt, so daß $y' = y + a$ gesetzt werden kann, ferner ist eine Skala längs des Zylinders fest angebracht, durch die man die Stellung des Fahrstifts kontrolliert.

Namentlich in Amerika werden zahlreiche Instrumente angewendet, die auf einer rotierenden, kreisförmigen Papierscheibe Diagramme aufzeichnen, die demnach auf ein Polarkoordinatensystem bezogen sind. Die Scheibe dreht sich gleichmäßig z. B. in

24 Stunden herum, während der Schreibstift sich entweder radial oder in einem Bogen vom Mittelpunkt weg oder auf ihn zu bewegt. Zur Auswertung dieser Diagramme ist das Durand-Amslersche Radialplanimeter konstruiert worden.[1]) Es besteht aus einem zylinderförmigem Gewicht, das zentrisch über den Mittelpunkt der Scheibe gestellt wird. Durch dasselbe sind zwei parallele Führungsstangen gelegt, an denen sich der Rahmen bewegt, der den Fahrstift und in gleicher Entfernung vom Scheibenmittelpunkt die Meßrolle trägt. Die Verbindungslinie des Mittelpunktes der Scheibe mit dem Fahrstift stellt in jedem Augenblick den Leitstrahl dar, dem die Rollenachse parallel liegt. Wenn der Leitstrahl den Winkel $\varphi_2 - \varphi_1$ überstreicht, so ist die Rollenablesung $r(\varphi_2 - \varphi_1)$ proportional, wenn r den mittleren Wert der Länge des Leitstrahls bedeutet.[2]) Dividiert man also durch $\varphi_2 - \varphi_1$, so erhält man diesen Mittelwert, der die mittlere Ordinate bei einem in rechtwinkligen Koordinaten dargestellten Diagramm bedeuten würde. Die Genauigkeit des Instrumentes entspricht nach Amsler und Hammer derjenigen des einfachen Polarplanimeters.

43. Momentenplanimeter. Das Momentenplanimeter von Amsler besteht hauptsächlich aus einem Wagen, der auf zwei Rädern und dem Fahrstift ruht. Die beiden Räder laufen hintereinander in der Nut (Rinne) eines Lineals, so daß der ganze Wagen parallel mit dem Lineal geradlinig verschoben werden kann (Fig. 64). Dieser Wagen trägt ein horizontal liegendes Zahnrad A, das sich um einen senkrecht in seinem Mittelpunkte O stehenden Zapfen dreht. Ein verlängerter Radius dieses Zahnrades ist der Fahrarm OF, der den Fahrstift F trägt. In das große Zahnrad A greifen zwei kleinere Zahnräder B und C ein, die ebenfalls horizontal liegend auf dem Wagen so angebracht sind, daß die Verbindungslinie der

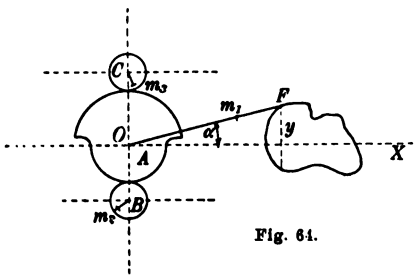


Fig. 64.

1) Zeitschr. f. Instrumentenk. **31**, 213 u. 214 (Hammer, Zusatz zur Mitteilung von Amsler).

2) Gleichen Zentriwinkeln $\Delta\varphi$ entsprechen Längenelemente der registrierten Kurve $r_1\Delta\varphi$, $r_2\Delta\varphi$, ... $r_n\Delta\varphi$. Die Rolle summiert $r_1\Delta\varphi + r_2\Delta\varphi + \cdots + r_n\Delta\varphi = \frac{r_1 + r_2 + \cdots + r_n}{n} n\Delta\varphi = r(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Mittelpunkte der drei Räder senkrecht zum Lineal liegt. Der Radius des Rades B beträgt die Hälfte des Radius des Zahnrades A, der des Rades C ein Drittel desselben. Dies wird bei gleicher Größe der Räder B und C dadurch erreicht, daß das große Rad A aus zwei Teilen mit verschieden großen, im Verhältnis 2 : 3 stehenden Radien besteht und der Sektor mit dem größeren Radius in C, der andere in B eingreift. Die Lage der drei Räder ist so gewählt, daß das Spiel des Fahrarms möglichst wenig beschränkt und andrerseits das Umschlagen verhindert wird, und daß der Wagen sich nicht einmal rechts, ein andres Mal links vom Fahrstift befindet.

Der Fahrarm trägt eine auf der Zeichenebene aufliegende Meßrolle m_1, deren Achse ihm parallel ist. Ebenso tragen die beiden kleinen Räder Meßrollen, deren Achsen in der Ebene der Räder liegen und radial gerichtet sind. Diese drei Rollen helfen den Wagen tragen; damit sie aber nur mit einem geringen Druck auf der Zeichenebene aufliegen, wird der Wagen durch eine über das Lineal hinwegreichende Stange mit einem Gegengewicht entlastet.

Der Apparat dient zur Bestimmung des Flächeninhalts, des statischen Moments und des Trägheitsmomentes einer Figur in bezug auf irgend eine Momentenachse in der Ebene der Figur. Betrachten wir diese als x-Achse, so muß der Mittelpunkt O des Rades A auf ihr liegen und das Lineal ihr parallel sein. Es wird dies leicht bewerkstelligt, indem zwei auf das Lineal senkrecht zu ihm aufzusetzende Hilfsarme mit ihren Spitzen auf die x-Achse gesetzt werden.

Denkt man sich zunächst den Fahrarm, also auch die Achse der daran befindlichen Laufrolle m_1 in die Richtung der x-Achse gestellt, so ist die Achse der Laufrolle m_3 des Rades C ebenfalls parallel der x-Achse oder der Richtung des Lineals, die Achse der Laufrolle m_2 des Rades B aber senkrecht zum Lineal gerichtet. Bei einer Bewegung des Wagens (in der Richtung der x-Achse) würde dann nur die Rolle m_2 den zurückgelegten Weg messen, während die beiden anderen Rollen keine Drehung erlitten.

Wenn man jetzt bei stillstehendem Wagen den Fahrarm um einen Winkel α gegen die x-Achse dreht, so dreht sich das Rad A um denselben Winkel und infolgedessen C um den dreifachen, B um den doppelten Winkel. Die Achse der Rolle m_1 wird dann den Winkel α, die der Rolle m_3 den Winkel 3α, die der Rolle m_2 den Winkel $90^0 - 2\alpha$ mit der x-Achse bilden, da letztere vorher

den Winkel 90^0 mit ihr einschloß und die Räder B und C sich in entgegengesetztem Sinne drehen.

Ist a die Länge des Fahrarms, also $y = a \sin \alpha$ die Ordinate des Fahrstifts, so erhält man die umfahrene Fläche

$$\int y dx = \int a \sin \alpha dx.$$

Die Rolle m_1 am Planimeterarm wickelt aber $d\sigma = \sin \alpha dx$ ab, man erhält daher an einer an ihr angebrachten Ablesevorrichtung

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{1}{a} \int y dx$$

und damit den Flächeninhalt $F = a(\sigma_2 - \sigma_1)$.

Liest man an der Rolle m_2 des Rades B ab statt an der Rolle des Fahrarms, so hat man nur $90^0 - 2\alpha$ statt α einzusetzen und erhält

$$\int a \cos 2\alpha dx = a \int dx - 2 \int a \sin^2 \alpha dx.$$

Das erste Integral verschwindet, wenn man eine geschlossene Figur umfährt, also denselben Anfangs- und Endwert von x erhält. Setzt man im zweiten Integral

$$\sin^2 \alpha = \frac{y^2}{a^2}$$

ein, so erhält man

$$2 \int \frac{y^2}{a} dx = \frac{2}{a} \int y dF,$$

wo $dF = y dx$ das Flächenelement ist. Nun ist das statische Moment eines Flächenteilchens $dx dy$ in bezug auf die x-Achse $y dx dy$, also das der ganzen Fläche

$$\int\int y dx dy = \frac{1}{2} \int y^2 dx = M_2.$$

Die Ablesung[1]) der Rolle m_2 gibt also

$$\sigma_2' - \sigma_1' = \frac{4}{a} M_2.$$

Ist y_0 die Ordinate des Schwerpunkts der Fläche, also

$$y_0 F = \int y dF,$$

1) Die Teilung der Rolle wird in dem Sinne gewählt, daß die Differenz $\sigma_2 - \sigma_1$ das positive Integral liefert.

wenn F der durch die Rolle des Fahrarms erhaltene Flächeninhalt ist, so wird

$$y_0 = \frac{\int y\,dF}{\int y\,dx}$$

erhalten und durch Drehung des Instrumentes um 90^0 kann man ebenso x_0 und damit die Lage des Schwerpunktes finden.

Gleichzeitig gibt die dritte Rolle m_3

$$\sigma_2'' - \sigma_1'' = \int a \sin 3\alpha\, dx = 3a\int \sin\alpha\, dx - 4a\int \sin^3\alpha\, dx$$

$$= 3F - \frac{4}{a^2}\int y^2\, dF.$$

Nun ist $y^2 dx dy$ das Trägheitsmoment eines Flächenteilchens, also

$$\int\int y^2 dy\, dx = \frac{1}{3}\int y^3 dx = M_3$$

das Trägheitsmoment der ganzen Fläche in bezug auf die x-Achse. Mithin erhält man durch Ablesung der Rolle m_3 vor und nach der Befahrung:

$$\sigma_2'' - \sigma_1'' = 3F - 12\,a^2 M_3,$$

woraus M_3 erhalten wird.

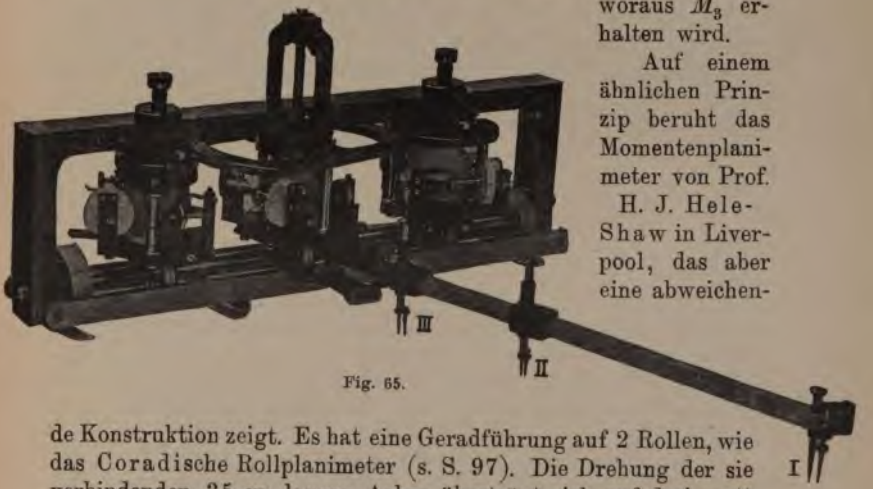


Fig. 65.

Auf einem ähnlichen Prinzip beruht das Momentenplanimeter von Prof. H. J. Hele-Shaw in Liverpool, das aber eine abweichende Konstruktion zeigt. Es hat eine Geradführung auf 2 Rollen, wie das Coradische Rollplanimeter (s. S. 97). Die Drehung der sie verbindenden 35 cm langen Achse überträgt sich auf drei matt geschliffene Glaskugeln. In den Rahmen, welche die Kugeln tragen,

sind die Meßrollen eingefügt, die die Kugeln stets berühren. Diese Rahmen drehen sich um vertikale Achsen und sind durch Zahnräder in der Weise in Verbindung, daß bei einer Drehung des mit dem mittelsten Rahmen verbundenen Fahrarms um einen Winkel α aus der Normalstellung (Fahrarm senkrecht zur Rollenachse) die Achse der (in der Figur 65 rechts liegenden) Momentenrolle den Winkel $90^0 \pm 2\alpha$ mit derselben Anfangsrichtung bildet, die (links liegende) Trägheitsmomentenrolle den Winkel 3α. Durch die Verwendung der Kugeln (an Stelle der Scheiben des vorigen Apparates) wird ein Gleiten der Meßrollen verhindert. Der Fahrstab kann um 40^0 nach beiden Seiten aus der Normalstellung gedreht werden, so daß Flächen von etwa 50 cm Breite und beliebiger Längenausdehnung umfahren werden können. Die Theorie läßt sich unmittelbar von dem vorigen Apparat übertragen.

Einen anderen Apparat zur Bestimmung beliebiger Momente durch Parallelabschieben hat J. Schnöckel[1]) konstruiert. Ferner kommen wir bei den Integraphen auf diese Bestimmungen zurück.

44. Schneidenplanimeter und Abarten. Das in der Ausführung und dem Grundgedanken einfachste Planimeter ist das von dem dänischen Kapitän Prytz erfundene und in Tekniske Forenings Tidsskrift 1886 beschriebene Stangenplanimeter (Stangplanimeter, Beilschneidenplanimeter, Hatchet-Planimeter).[2])

Das Instrument besteht aus einer Stange, die an beiden Enden rechtwinklig in derselben Vertikalebene umgebogen ist (Fig. 66). Das eine Ende ist zugespitzt, das andre trägt eine kleine, stark gekrümmte Schneide (Messerchen, Beilschneide), deren Ebene durch die Spitze geht. Man hält die Spitze mit zwei Fingern und führt sie in senkrechter Lage um die geschlossene Kurve herum, wobei das Messerchen nachgezogen wird. Kehrt man mit der Spitze wieder zum Anfangspunkt zurück, so ist das Messerchen im allgemeinen nicht in seinen Ausgangspunkt gelangt Hat man nun vor und nach der Umfahrung durch einen Druck auf die Schneide einen

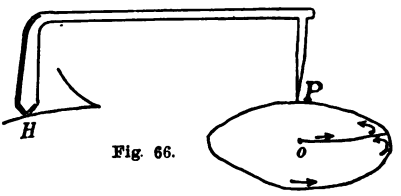


Fig. 66.

1) S. Zeitschr. f. Vermessungswesen **24**, S. 245, 1904.

2) Vgl. Prytz, Tidsskrift for Opmaalings- og Matrikulvaesen 1895, 383—392 und die Beschreibung in der Broschüre des Fabrikanten Cornelius Knudsen in Kopenhagen 1894.

Eindruck ins Papier gemacht, so ist, wenn c der Abstand dieser beiden Marken und a die Armlänge (Entfernung: Spitze—Schneide) ist, das Produkt ac in erster Näherung der Flächeninhalt der umfahrenen Figur. Die Theorie ist schwieriger als bei anderen Planimetern, aber von Bedeutung für die Anwendung des Instrumentes. Man gelangt außer in einfachen Fällen (Quadrat und Kreis), wie es scheint, zu keinem geschlossenen Ausdruck. (Vgl. C. Runge, ZS. f. Vermessungswesen **24** (1895) und Hamann, ebenda **25** (1896).

Wir denken uns die Fläche F in Elementardreiecke zerlegt, die sämtlich in einem Punkte O im Innern ihre Spitze haben, während jeder Leitstrahl von O nach einem Punkte des Umfangs eine gemeinschaftliche Seite zweier benachbarten Dreiecke bildet, und jedes Linienelement der Umgrenzungskurve die der Spitze O gegenüberliegende Seite ist. Wenn wir dann jedes Elementardreieck vom Punkte O ausgehend mit dem Stift des Planimeters umfahren, so wird jeder Leitstrahl zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufen und die Umfahrung endet schließlich wieder im Punkte O.

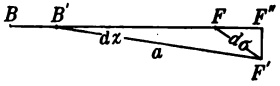


Fig. 67.

Es sei OSS' ein solches Elementardreieck (Fig. 68), O der Anfangspunkt und OX die Anfangsrichtung für Polarkoordinaten. Der Winkel des Leitstrahles $OS = r$ mit OX sei ϑ, der von $OS' = r + dr$ mit OX eingeschlossene Winkel $\vartheta + d\vartheta$, so ist $d\vartheta$ der Winkel an der Spitze des Dreiecks.

Den Richtungswinkel des Planimeterarmes bezeichnen wir im Anfangspunkte O bei Beginn der Umfahrung mit Φ, am Ende mit $\Phi + d\Phi$. In S sei er φ und in S' $\varphi + d\varphi$.

Wenn der Planimeterstift ein geradliniges Streckenelement (Fig. 67) $FF' = d\sigma$ durchläuft, χ der Winkel des Planimeterarmes mit FF' im Punkte F, $\chi + d\chi$ im Punkte F' ist und a die Länge des Armes bezeichnet, so werden wir die Bewegung des Planimeters in die beiden ihm allein möglichen Bewegungen zerlegen, von denen die eine in einer Verschiebung in der Richtung des Planimeterarmes von BF nach $B'F''$ besteht, während die andere den Übergang des Stiftes von F'' nach F' durch eine Drehung um den Berührungspunkt B' der Beilschneide hervorbringt. In dem Dreiecke $B'F'F''$ mit dem Winkel $d\chi$ bei B' ist $F'F'' = a\,d\chi$, mithin $\sin\chi\, d\sigma = a\,d\chi$ oder

$$\frac{d\chi}{\sin\chi} = \frac{d\sigma}{a}. \tag{1}$$

Für eine endliche gerade Strecke σ erhalten wir, wenn χ und χ' die Winkel des Planimeters mit σ am Anfang und Ende der Bewegung sind,

$$\int_{\chi}^{\chi'} \frac{d\chi}{\sin\chi} = \frac{\sigma}{a} \quad \text{oder} \quad \lg \operatorname{tg} \frac{\chi'}{2} - \lg \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} = \frac{\sigma}{a},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\operatorname{tg} \frac{\chi'}{2} = e^{\frac{\sigma}{a}} \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}. \tag{2}$$

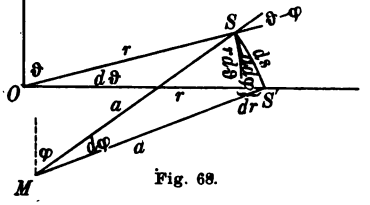


Fig. 68.

Diese Formel können wir sogleich anwenden für die Führung des Planimeterstifts längs der Geraden $OS = r$ (Fig. 68), wenn wir $\chi = \Phi - \vartheta$, $\chi' = \varphi - \vartheta$ einsetzen:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} = e^{\frac{r}{a}} \operatorname{tg} \frac{\Phi - \vartheta}{2}. \tag{3}$$

Hiermit ist also φ aus Φ erhalten. Wir lassen nun den Stift von S nach S' fahren. Um die Änderung $d\varphi$ von φ zu erhalten, stellen wir daher eine der Gleichung (1) entsprechende auf. Bezeichnen wir vorübergehend den Winkel, den SS' und das Kreisbogenelement $SS'' = r\,d\vartheta$ untereinander einschließen, mit ψ, so ist

$$\cos\psi\, ds = r\,d\vartheta, \quad \sin\psi\, ds = dr. \tag{4}$$

Der Planimeterarm MS schließt in S mit OS den Winkel $\vartheta - \varphi$ ein, also mit SS' den Winkel $\vartheta - \varphi + 90^0 - \psi$. Hier sind ϑ und ψ als gegebene Winkel anzusehen, welche die Lage von ds bestimmen. Wir wenden nun Gleichung (1) an und erhalten:

$$\frac{d\varphi}{\cos(\vartheta - \varphi - \psi)} = \frac{ds}{a}$$

oder

$$a\,d\varphi = \cos(\vartheta - \varphi)\cos\psi\, ds + \sin(\vartheta - \varphi)\sin\psi\, ds$$

und mit Rücksicht auf (4)

$$a\,d\varphi = \cos(\varphi - \vartheta) r\,d\vartheta - \sin(\varphi - \vartheta)\,dr. \tag{5}$$

Hiermit haben wir also $d\varphi$ durch φ und die gegebenen Stücke er-

halten. Wenn wir nun von S' nach O zurückgehen, so könnten wir die der Gleichung (3) entsprechende Gleichung aufstellen:

$$(6) \qquad \operatorname{tg}\frac{\Phi + d\Phi - \vartheta - d\vartheta}{2} = e^{\frac{r+dr}{a}} \operatorname{tg}\frac{\varphi + d\varphi - \vartheta - d\vartheta}{2}.$$

Wir erhalten aber $d\Phi$ bequemer, wenn wir Gleichung (3) sowohl nach Φ, φ, wie nach ϑ und r differenzieren, und für $d\varphi$ und dr den bei der bisherigen Umfahrung erhaltenen Wert nach (5) einsetzen. Nach vorangegangener Logarithmierung der Gleichung (3) bekommen wir, wenn wir noch den andern Richtungssinn beachten:

$$(7) \qquad \frac{d(\Phi - \vartheta)}{\sin(\Phi - \vartheta)} = \frac{dr}{a} + \frac{d(\varphi - \vartheta)}{\sin(\varphi - \vartheta)}.$$

Wir setzen $d\varphi$ aus (5) ein und finden

$$\frac{d(\Phi - \vartheta)}{\sin(\Phi - \vartheta)} = \operatorname{ctg}(\varphi - \vartheta)\frac{r}{a}d\vartheta - \frac{d\vartheta}{\sin(\varphi - \vartheta)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{r}{a}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi - \vartheta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\varphi - \vartheta}{2}\right) - \left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi - \vartheta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\varphi - \vartheta}{2}\right)\right]d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{r}{a} - 1\right)\operatorname{ctg}\frac{\varphi - \vartheta}{2} - \left(\frac{r}{a} + 1\right)\operatorname{tg}\frac{\varphi - \vartheta}{2}\right]d\vartheta.$$

Wenn wir jetzt aus der (7) entsprechenden Integralgleichung, die sich von (6) nur durch Wegfall der Differentialgrößen unterscheidet, die Werte für $(\varphi - \vartheta)$ einsetzen, so erhalten wir:

$$\frac{d(\Phi - \vartheta)}{\sin(\Phi - \vartheta)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{r}{a} - 1\right)e^{+\frac{r}{a}}\operatorname{ctg}\frac{\Phi - \vartheta}{2} - \left(\frac{r}{a} + 1\right)e^{-\frac{r}{a}}\operatorname{tg}\frac{\Phi - \vartheta}{2}\right]d\vartheta$$

und

$$d(\Phi - \vartheta) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{r}{a} - 1\right)e^{+\frac{r}{a}}(1 + \cos(\Phi - \vartheta))\right.$$

$$\left. - \left(\frac{r}{a} + 1\right)e^{-\frac{r}{a}}(1 - \cos(\Phi - \vartheta))\right]d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{r}{a}\left(e^{+\frac{r}{a}} - e^{-\frac{r}{a}}\right) - \left(e^{+\frac{r}{a}} + e^{-\frac{r}{a}}\right)\right]d\vartheta$$

$$+ \left[\frac{r}{a}\left(e^{+\frac{r}{a}} + e^{-\frac{r}{a}}\right) - \left(e^{+\frac{r}{a}} - e^{-\frac{r}{a}}\right)\right]\cos(\Phi - \vartheta)d\vartheta.$$

Es ist

$$e^{\pm\frac{r}{a}} = 1 \pm \frac{r}{a} + \frac{r^2}{2a^2} \pm \frac{r^3}{6a^3} + \frac{r^4}{24a^4} \pm \frac{r^5}{120a^5} + \frac{r^6}{720a^6} \pm \cdots$$

$$d(\Phi-\vartheta)=\left[\frac{r^2}{a^2}+\frac{r^4}{6a^4}+\frac{r^6}{120a^6}\cdots-1-\frac{r^2}{2a^2}-\frac{r^4}{24a^4}-\frac{r^6}{720a^6}-\cdots\right]d\vartheta$$

$$+\left[\frac{r}{a}+\frac{r^3}{2a^3}+\frac{r^5}{24a^5}\cdots-\frac{r}{a}-\frac{r^3}{6a^3}-\frac{r^5}{120a^5}-\cdots\right]\cos(\Phi-\vartheta)d\vartheta,$$

also

$$d\Phi=\left[\frac{r^2}{2a^2}+\frac{r^4}{8a^4}+\frac{r^6}{144a^6}+\cdots\right]d\vartheta+\left[\frac{r^3}{3a^3}+\frac{r^5}{30a^5}+\cdots\right]\cos(\Phi-\vartheta)\,d\vartheta.$$

Integriert man um die ganze Kurve, so sind die Grenzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 2\pi$ und wenn Φ in $\Phi + \Delta\Phi$ sich ändert, so daß das Planimeter in seiner Endstellung den Winkel $\Delta\Phi$ mit seiner Anfangsstellung einschließt, so ergibt sich:

$$a^2\Delta\Phi = \int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}d\vartheta + \int_0^{2\pi}\frac{r^4 d\vartheta}{8a^2} + \int_0^{2\pi}\frac{r^6 d\vartheta}{144a^4} + \cdots$$

$$+\int_0^{2\pi}\frac{r^3}{3a}\cos(\Phi-\vartheta)\,d\vartheta + \int_0^{2\pi}\frac{r^5}{30a^3}\cos(\Phi-\vartheta)\,d\vartheta + \cdots$$

Hier ist das erste Integral die Fläche, deren Inhalt zu bestimmen ist. Wenn die Fläche nicht groß ist und r gegen die Länge des Planimeters klein bleibt, so gibt $a \cdot a\Delta\Phi$ den Flächeninhalt nahezu an. $a\Delta\Phi = \Delta S$ ist der Bogen, den der Berührungspunkt der Schneide um den Anfangspunkt O beschrieben hat und der im Falle eines kleinen Bogens auch durch die Sehne, also die Entfernung der beiden Marken im Papier ersetzt werden kann:

$$a\Delta S = F + \frac{1}{4a^2}\int r^2 dF + \frac{1}{72a^4}\int r^4 dF + \cdots$$

$$+\frac{2}{3a}\int r\cos(\Phi-\vartheta)\,dF + \cdots$$

Das Integral im ersten Korrektionsglied stellt das Trägheitsmoment um eine durch O gehende zur Fläche senkrechte Achse dar, es ist daher ein Minimum, wenn O der Schwerpunkt der Fläche ist. Das folgende Glied ist jedenfalls kleiner als $\frac{F}{72}\left(\frac{R}{a}\right)^4$, wenn R der größte

vorkommende Leitstrahl ist. Das letzte der angeschriebenen Glieder hängt von der Anfangslage des Planimeters ab, und es ist ersichtlich, daß eine Änderung des Richtungswinkels um 180^0, also Einführung von $180^0 + \Phi$ statt Φ, das Vorzeichen ändert. Wenn man also zwei Umfahrungen bei diametral entgegengesetzter Anfangslage des Planimeters macht, so fällt im Mittel aus beiden dieses Glied (und ebenso die folgenden) fort.

Maffiotti fand für Flächen von 4000 bis 8000 mm^2 mittlere Fehler von 0,36 bis 1,16% bei rechtläufiger, 0,28 bis 0,70% bei entgegengesetzter Führung des Fahrstiftes.

Bei einer etwas anderen Form „Goodmans Hatchet Planimeter", die eine Veränderung des Abstandes: Schneide-Fahrstift gestattet, ist die unmittelbare Ablesung von Mittelordinaten (für Indikatordiagramme und dgl.) vorgesehen und eine Skala zur einfachen Berücksichtigung des Faktors $\left[1 - \left(\frac{R}{2a}\right)^2\right]$ angebracht.[1])

Andere Abänderungen bestehen in dem Ersatz der Schneide durch eine Rolle mit scharfem Rand, in seitlichen Stützen, welche die senkrechte Haltung des Planimeters gewährleisten usw.

Auf etwas verändertem Prinzipe beruhen einige andere Planimeter, unter denen wir dasjenige von Fieguth in Danzig nennen. Die Rolle sitzt auf einem zum Planimeterarm nahezu senkrecht angebrachten Arm und verschiebt sich auf diesem. Die Verschiebung der Rolle auf diesem Querarm, die an einer Teilung abgelesen wird, gibt in die Fahrarmlänge multipliziert den Flächeninhalt.

Ähnlich ist das Planimeter von Lippincott, endlich auch dasjenige von Weber-Kern. Bei letzterem ist der Fahrarm durch einen senkrecht stehenden Zylinder horizontal hindurchgesteckt, der auch den zum Fahrarm senkrechten Radarm trägt, an dessen Skala wiederum die Verschiebung eines auf ihm verschiebbaren scharfrandigen Rädchens abgelesen wird. Die Achse des Zylinders bewegt sich in unverändert senkrechter Lage längs der Nut eines auf der Zeichenebene aufliegenden Lineals. Der Fahrarm läßt sich durch den Zylinder hindurchziehen, so daß seine Länge

1) Es ist $F = a\Delta S - \frac{1}{4a^2}\int r^2 dF$ oder genähert $F = a\Delta S - \frac{R^2}{4a^2}F$ oder auch $F = a\Delta S\left(1 - \frac{R^2}{4a^2}\right)$.

verändert werden kann. Die Theorie ist einfach, indem die Führungskurve als ein Kreis mit unendlich großem Radius angesehen werden kann. Das Planimeter kann nur zwei Arten von Bewegungen ausführen, erstens eine Drehung um den Schnittpunkt beider Achsen, bei der sich das Rad dreht, aber nicht auf seiner Achse verschiebt, zweitens eine Verschiebung parallel zur Richtung des Lineals, die wir als x-Achse denken. Ist der Winkel des Fahrarms von der Länge a mit der x-Achse α, so wird bei einer Verschiebung dx das Rädchen erstlich eine nicht in Betracht kommende Abwicklung $\cos\alpha\, dx$ und zweitens eine Verschiebung $dv = \sin\alpha\, dx$ ausführen. Nun ist der Inhalt der zu umfahrenden Fläche

$$F = \int y\, dx = \int a \sin\alpha\, dx = a\int dv = a(v_2 - v_1).$$

Um beim Prytzschen Planimeter den Flächeninhalt aus $a^2\Delta\Phi$ zu berechnen (vgl. S. 126), besitzt man kein einfaches Hilfsmittel, den Winkel $\Delta\Phi$ zwischen der Anfangs- und Endlage der Stange zu messen. Deshalb hat Horst von Sanden das Instrument in der Weise abgeändert (Fig. 69), daß statt der Schneide zwei Rollen mit scharfem Rande angebracht werden, die auf einer zur Stange rechtwinkligen Achse in gleicher Entfernung von der Stange sitzen. Der Mittelpunkt M zwischen beiden Rollen, also der Endpunkt der Stange, wird dann in der gleichen Weise wie die Schneide geführt.[1]) Die Berührungspunkte der Rollen beschreiben zwei Parallelkurven. Ist das vom Punkte M beschriebene Bogenelement $ds = r\, d\varphi$ und der Abstand der Rollen $2b$, so werden die beiden Rollen Bogenelemente $d\sigma_1 = (r + b)d\varphi$ und $d\sigma_2 = (r - b)d\varphi$ beschreiben. Damit folgt $d\sigma_1 - d\sigma_2 = 2b\, d\varphi$, also

$$\int (d\sigma_1 - d\sigma_2) = 2b\Delta\Phi.$$

Nun ist die Differenz $d\sigma_1 - d\sigma_2$ der relativen Verdrehung der Rollen gegeneinander gleich. Um sie ablesen zu können, ist jede Rolle mit einer Trommel in der Mitte der Achse starr verbunden. Die eine Trommel trägt eine Teilung, die andere zwei um 180^0

1) Bei völliger Gleichheit der Rollenradien wird er bei bloßer Drehung der Stange an derselben Stelle bleiben, da dann beide Räder in verschiedener Richtung denselben Kreisbogen durchlaufen. Inwieweit dies praktisch erreicht ist, wird von dem Verf. in Zeitschr. für Mathematik u. Physik Bd. 59, S. 314 nicht erwähnt. — Das Instrument ist wohlfeiler (54 M.) als andere Instrumente gleicher Genauigkeit.

auseinanderstehende Nonien. An dem gerade sichtbaren Nonius wird die Verdrehung abgelesen, die mit einer Konstanten multipliziert den Flächeninhalt angibt. Die Regeln für die Handhabung des Apparates schließen sich an die Theorie des Stangenplanimeters an. Bei dem ausgeführten Apparat ist der Rollenabstand 150 mm, der Rollendurchmesser 40 mm, die Stangenlänge a ist zwischen 50 und 192 mm verstellbar, die Trommel ist in 100 Teile geteilt, von denen Zehntel geschätzt werden. Die Genauigkeit ergab sich bei Umfahrung eines Kreises von 10 mm Radius (0,7 % bei $a = 191$, 0,4 % bei $a = 101$).

Fig. 69.

Ebenfalls zwei symmetrisch an der Stange angebrachte Schneiderollen besitzt das Präzisions-Stangenplanimeter von Th. Pregél (vgl. Zeitschr. f. Instrumentenk. **28**, 373 und **31**, 373).

Das optische Planimeter von J. Schnöckel unterscheidet sich hauptsächlich dadurch von anderen, daß es keinen Fahrstift hat. Vielmehr befindet sich über der scharfkantigen Rolle, die am Ende eines langgestreckten rechteckigen Rahmens angebracht ist, ein senkrecht stehender Spiegel, dessen Ebene die Rollenachse und den Berührungspunkt der Rolle enthält. Das Instrument dient hauptsächlich zur Ausmessung von Registrierstreifen und Ermittlung der mittleren Ordinate. Zu diesem Zwecke wird ein vorn befindlicher Index an den Anfangspunkt der Kurve gelegt, auf einem

untergelegten Blatte Papier eine Gerade rückwärts in derselben Entfernung vom Rollenauflagepunkte parallel den Ordinaten der Kurve gezogen. Das Instrument selbst ist in seiner Längsrichtung parallel der Abszissenachse aufgestellt, so daß ein in dieser Richtung gespannter Faden die auf dem Papier gezogene Gerade l in einem in bezug auf die Rolle symmetrisch zum Anfangspunkt gelegenen Punkte F schneidet. Dieser Punkt wird durch den teilweise durchbrochenen Spiegel betrachtet und fällt demnach bei der Anfangsstellung des Instrumentes mit dem Spiegelbild des Anfangspunktes der Kurve zusammen. Das Instrument wird nun so bewegt, daß immer der Schnittpunkt des Fadens mit l mit den Kurvenpunkten, die im Spiegel erscheinen, zusammenfällt; ist der Endpunkt der Kurve erreicht, so entspricht der Indexpunkt der mittleren Ordinate. Das Instrument wird jetzt, nach Arretierung der Rolle, soweit gedreht, bis seine Fadenrichtung durch den ersten Auflagepunkt der Rolle in der Anfangsstellung hindurchgeht.

Sind x, y die Koordinaten des optisch eingestellten Kurvenpunktes, ξ, η des Berührungspunktes des Rädchens, so ist, wenn die Gerade l dem Werte $x = 0$ entspricht, immer $x = 2\xi$. Da die Richtung des Instrumentes (strenger des Fadens) den Weg der Rolle in jedem Augenblick tangiert, so ist

$$\frac{y-\eta}{x-\xi} = \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg}\tau,$$

wo τ der Winkel der Tangente mit der Abszissenachse ist. Hieraus folgt

$$y\,dx = 2\,d(\eta\xi)$$

oder

$$\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} y\,dx = \eta(\xi - \xi_0).$$

Da nun

$$y_m = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} y\,dx$$

der Wert der gesuchten Mittelordinate ist, so ist mit Rücksicht auf $x = 2\xi$, $x_0 = 2\xi_0$, $\eta = y_m$. Über die Verwendung des Instrumentes zur Aufzeichnung der mittleren Integralkurve oder im besonderen Falle zur Zeichnung von Hyperbeln s. Zeitschr. für Instrumentenk. **31**, 69, 1911.

Von demselben Erfinder rührt ein Kompensationsplanimeter her, das im wesentlichen wiederum aus einer einfachen

Stange mit Fahrstift besteht, die auf einer beweglichen Rolle rollt. Der scharfe Rollenrand findet in einer Rille des Stabes Halt, mit der der Stab auf ihm aufgelegt wird. Damit die Rolle nicht umkippt, ist sie seitlich in einen auf der Unterlage rollenden Zylinder verlängert. (Bei anderen Konstruktionen ist der Zylinder durch ein Rollenpaar oder durch eine Kugel ersetzt.) Ein weiterer Stützpunkt für den Stab ist neben dem Fahrstift am einen Ende angebracht. Das andere Ende des Stabes läuft in einen Index aus, an den eine Skala ungefähr senkrecht zum Stabe angelegt wird, die aber während der Umfahrung um eine Nadelspitze an einem ihrer Enden weggedreht werden kann, um die Bewegungen des Stabes nicht zu hindern. Er wird dann nach Beendigung der Umfahrung wieder gegen den Stabindex gelegt, um die Entfernung der Indexlagen (vor und nach der Umfahrung) zu messen, ähnlich wie beim Prytzschen Planimeter den Abstand der Marken. Die Rolle wird an einer Marke am Stabe eingestellt und kehrt nach der Umfahrung genau oder wenigstens nahezu in diese Anfangslage zurück. Für letzteren Fall ist eine Korrektion anzubringen. Die Theorie (vgl. Zeitschr. f. Instrumentenk. **31**, 173) schließt sich an die des vorigen Instrumentes an, indem der Stab sich in seiner Richtung doppelt so schnell wie die Rolle bewegt. Die Genauigkeit ist annähernd gleich der des Coradischen Kompensationsplanimeters gefunden worden und übertrifft die des Prytzschen Instrumentes bedeutend, während sie etwas unter derjenigen des freischwebenden Präzisionskugelplanimeters von Coradi zurückbleibt.

VIII. Abschnitt.

Apparate zur harmonischen Analyse.

45. Allgemeines und Verwendung des Planimeters. Eine Funktion y von x kann unter gewissen Einschränkungen in eine nach den cosinus und sinus der Vielfachen von x fortschreitende (Fouriersche) Reihe entwickelt werden. Diese Funktion nehmen wir graphisch durch eine Kurve gegeben an, deren Abszissenintervall sich von $x = 0$ bis $x = u$ erstreckt. In diesem Intervall kann die Kurve vollständig willkürlich gezogen sein, so lange es für jedes x nur einen einzigen endlichen Wert y gibt, und hierin ist der Fall eingeschlossen, daß bei der Bewegung eines Punktes längs der Kurve die ihm entsprechenden Abszissen-

werte stets zunehmen. Diese Bedingung wird für solche Kurven erfüllt sein, bei denen die x-Koordinate die Zeit darstellt, z. B. für alle registrierten Kurven, die durch Bewegung der Zeichenfläche mittels eines Uhrwerks entstanden sind. Unstetigkeiten der Kurve, d. h. ein plötzlicher Übergang von einer Ordinate y_1 zu einer andern y_2 dürfen in endlicher Anzahl vorkommen. Ist das Zeichenpapier etwa um einen Zylinder geschlungen, so daß die Anfangs- und Endabszisse zusammenfallen, so wird sehr häufig die Anfangs- und Endordinate verschieden sein. Wenn z. B. die Lufttemperaturen für einen Zeitraum von 24 Stunden aufgezeichnet werden und die Stundenwerte die Abszissen, die Lufttemperaturen die Ordinaten geben, so werden die Mitternachtstemperaturen am Beginn und am Ende nicht übereinstimmen. Man kann dann die beiden Punkte der Kurve durch eine Mantellinie des Zylinders geradlinig verbunden denken und hat also in diesem Falle eine solche Stetigkeitsunterbrechung.

Wir setzen nun einen Winkelwert θ der Abszisse proportional $px = \theta$ und $pu = 2\pi$, so daß $\theta = \frac{2\pi x}{u}$ ist; dann können wir die Gleichung der Kurve in der folgenden Form schreiben, wo a und b konstante Koeffizienten sind:

$$(1)\quad \begin{aligned} y = {} & a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta + a_3\cos 3\theta + \cdots + a_n\cos n\theta \\ & + b_1\sin\theta + b_2\sin 2\theta + b_3\sin 3\theta + \cdots + b_n\sin n\theta. \end{aligned}$$

Es ist dann nach Fourier

$$(2)\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y\cos n\theta\, d\theta,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y\sin n\theta\, d\theta,\quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

und $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y\, d\theta$ die mittlere Ordinate, die durch ein Planimeter ermittelt werden kann.

Streng genommen hat die Fouriersche Reihe eine unendlich große Gliederzahl, aber in den meisten praktischen Fällen sind die Glieder höherer Ordnung klein genug, um vernachlässigt zu werden. Beschränkt man sich auf $2n$ Glieder, so kann man schreiben:

$$(3)\qquad y = a_0 + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} a_\varkappa\cos\varkappa\theta + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} b_\varkappa\sin\varkappa\theta.$$

Um die Koeffizienten zu finden, teilen wir das Abszissenintervall in $2n$ gleiche Teile und messen die Ordinaten $y_\lambda = y_1, \ldots y_{2n}$ in den Teilpunkten, wo y_λ zu $\theta_\lambda = \frac{2\pi x_\lambda}{u}$ gehört. Es müssen dann die zusammengehörigen Werte die Gleichungen befriedigen:

$$(4)\quad y_\lambda = a_0 + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} a_\varkappa \cos \varkappa\theta_\lambda + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} b_\varkappa \sin \varkappa\theta_\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \ldots 2n.$$

Diese $2n$ linearen Gleichungen können zur Berechnung der $2n$ Koeffizienten $a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n$ dienen

$$(5)\qquad n a_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{2n} y_\lambda \cos \varkappa\theta_\lambda, \quad n\, b_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{2n} y_\lambda \sin \varkappa\theta_\lambda, \quad \varkappa = 1 \ldots n.$$

Für $\varkappa = 0$ oder $\varkappa = n$ erhält man $2n a_0$.[1])

Da nun zwischen den Gleichungen (4) und (5) eine gewisse Reziprozität stattfindet, so läßt sich die Verwendung eines Instruments für die beiden Zwecke voraussehen, einmal die Koeffizienten einer gegebenen Kurve zu ermitteln, zweitens eine Kurve aus gegebenen Werten zu konstruieren.

Die hierzu erfundenen Instrumente heißen Analysatoren und sind also auch Instrumente zur Darstellung bestimmter Integrale wie die Planimeter.

In der Tat lassen sich diese letzteren nicht nur zur Ermittelung von a_0, sondern auch für die anderen Koeffizienten verwenden, wie S. Finsterwalder, P. Schreiber und Ad. Schmidt gezeigt haben. Um zunächst a_1 und b_1 zu erhalten, denkt man sich die Kurve um einen Zylinder gelegt, so daß die x-Achse den Grundkreis des Zylinders bildet, der den Umfang u hat. Projiziert man die Kurve auf zwei zu einander senkrechte Ebenen, die sich in der Zylinderachse schneiden und von denen die eine durch die Endordinate gelegt ist, so erhält man die Koeffizienten a_1 und b_1 durch die Inhalte der von den Projektionen der Kurve, der x-Achse und den Endordinaten eingeschlossenen Flächen, wenn man noch

1) Setzt man $a_\varkappa = i_\varkappa \sin \gamma_\varkappa$, $b_\varkappa = i_\varkappa \cos \gamma_\varkappa$, so kann man $a_\varkappa \cos \varkappa\theta + b_\varkappa \sin \varkappa\theta = i_\varkappa \sin(\gamma_\varkappa + \varkappa\theta)$ schreiben. Es ist in vielen Fällen wünschenswert, die Amplituden $i_\varkappa$ und die Phasenwinkel $\gamma_\varkappa$ statt $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ zu erhalten. Um dies zu erleichtern, hat Strachey in London einen besonderen Rechenschieber konstruiert (vgl. W. Dyck Katalog mathematischer usw. Instrumente, München, 1892, S. 144).

mit $\frac{u}{2}$ dividiert. Die Ebene, die durch den Anfangspunkt der Kurve geht, dient zur Berechnung von b. Hier wird $\sin\theta$ gleichzeitig mit θ null, während auf der dazu senkrechten Ebene (für die Berechnung von a) sich das Linienelement des Anfangspunkts unverkürzt abbildet und $\cos\theta = 1$ für $\theta = 0$ ist. Wenn die Quadranten der Winkel beachtet werden, so erhält man die Flächenteile auf beiden Seiten der Projektionsebene (vorn und hinten) mit verschiedenen Vorzeichen, wie es sein muß.

Die anderen Koeffizienten lassen sich in entsprechender Weise bestimmen. Man setzt $n\theta = n\frac{2\pi x}{u} = \frac{2\pi x}{u'}$ oder $u' = \frac{u}{n}$, nimmt also einen Zylinder vom Umfang $\frac{u}{n}$. Da x von 0 bis $u = nu'$ variiert, so umschlingt die Kurve den Zylinder n-mal. Man kann ebenso gut $n\frac{2\pi x}{u} = \frac{2\pi x'}{u}$ setzen, also $x' = nx$, d. h. die Abszissen n-mal vergrößert auf einen Zylinder vom Umfange u auftragen (während die Ordinaten unverändert bleiben). Da aber in dem Integral (2) dx' statt dx eingeführt wird, so muß man mit $\frac{2}{nu}$ statt mit $\frac{2}{u}$ multiplizieren.

Bei der wirklichen Verzeichnung der auszumessenden Kurven denkt man sich den Zylinderumfang in eine solche Anzahl von gleichen Teilen geteilt, daß die Ordnungszahlen der Reihenkoeffizienten als Faktoren in dieser Anzahl enthalten sind (z. B. 60 bei Beschränkung auf 6 Glieder, 24 bei 4 Gliedern) und zieht die den betreffenden Mantellinien des Zylinders entsprechenden Geraden in der Projektion. Trägt man dann die Ordinaten auf, so erhält man durch die geradlinige Verbindung ihrer Endpunkte die gesuchten Kurven mit genügender Genauigkeit und kann sie nun mit dem Planimeter ausmessen.

46. Analysatoren von Yule. Eine einfache Form eines Analysators, die man sich selbst herstellen kann, ist von Yule beschrieben worden. An der Seite eines größeren quadratischen Kartonblattes ist ein Lineal befestigt (etwa aufgeleimt), an dem sich ein kleines viereckiges Kartonblatt verschieben läßt, das am Lineal anliegen muß und einen Zeiger parallel der x-Achse trägt. Die untere Kante des großen Blattes wird mit der Richtung der x-Achse zusammengelegt und zwar so, daß der Zeiger, wenn er unten einsteht, auf den Anfangspunkt der Kurve weist. Das Ab-

szissenintervall teilt man z. B. in 60 Teile, je 6^0 entsprechend und errichtet die Mittelordinaten, deren zugehörige Kurvenpunkte man nach und nach mit dem Zeiger durch Verschiebung des kleinen Blattes in der y-Richtung einstellt, indem man den großen Karton gleichzeitig längs der x-Achse verschiebt. Auf dem kleinen Karton bringt man z. B. eine sinus-Skala, ebenfalls in der Richtung der x-Achse, an und stellt den Fahrstift eines Amslerschen Polarplanimeters jedesmal auf den der betreffenden Ordinate entsprechenden Teilstrich, also wenn man mit 0^0 anfängt, schiebt man ihn immer um je 6^0 weiter. Der Pol des Planimeters ist fest auf dem großen Karton. Infolge dessen umfährt der Stift des Planimeters folgende Flächen:

$$y_1(\sin 6^0 - \sin 0^0),\ y_2(\sin 12^0 - \sin 6^0),\ y_3(\sin 18^0 - \sin 12^0), \cdots,$$
$$y_n(\sin 360^0 - \sin 354^0).$$

Wir erhalten also genähert

$$\int y\, d(\sin\theta) = \int y \cos\theta\, d\theta = a$$

und durch Einsetzen anderer Skalen und andere Wahl des Abszissenintervalls andere Koeffizienten.

Nicht ganz so einfach ist ein anderes Instrument von Yule. Es besteht aus einem Lineal, das auf zwei Walzen an seinen

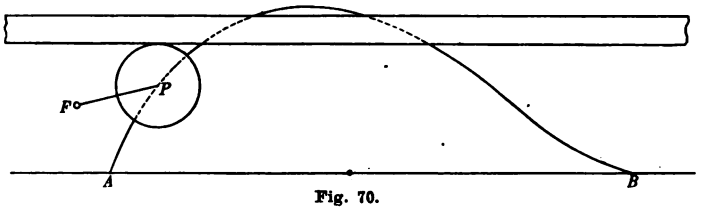


Fig. 70.

Enden rollt und sich dadurch parallel mit sich selbst verschieben kann. Längs der einen Kante trägt es eine Zahnstange von 30 cm Länge (mit acht Zähnen auf einen Zentimeter), die durch ein Gegengewicht an der entgegengesetzten Kante im Gleichgewicht gehalten wird, so daß das Lineal horizontal liegt. Eine am Rande gezahnte Scheibe wird so angelegt, daß sie in die Zahnstange eingreift. Bei der Bewegung der Scheibe längs der Kurve muß das Lineal angeschoben werden, damit die Scheibe in die Zahnstange eingreift. Außer einer großen Scheibe mit 240 Zähnen,

die sich bei der Bewegung längs der Zahnstange also gerade einmal herumdreht, werden nach einander noch kleinere Scheiben mit 120, 80 usw. Zähnen verwendet. Die große Scheibe hat drei Löcher in der Richtung eines Durchmessers, von denen das mittelste mit einem Glasfenster und einem Punkt darauf zur Einstellung auf die Punkte der Kurve versehen ist, die beiden anderen dienen zur Orientierung der Scheibe. Ein viertes kegelförmiges Loch auf einem zum vorigen senkrechten Durchmesser hat den Zweck, den Fahrstift eines Polarplanimeters aufzunehmen. Seine Entfernung vom Mittelpunkt der Scheibe (Fahrpunkt) beträgt $\frac{10}{\pi}$ cm. Bei den kleineren Rädern, die auf einer Grundplatte angebracht sind, befindet sich das Loch für den Planimeterstift auf einem über das Rad hervorragenden Arm, der sich mit dem Rade frei über der Zahnstange des Lineals dreht.

Das Abszissenintervall $2u$ macht man der Länge der Zahnstange gleich, der Scheibenumfang ist dann ein aliquoter Teil desselben $\frac{2u}{n}$. Das Loch F für den Fahrstift des Planimeters beschreibt bei der Drehung der Scheibe einen Kreis mit dem Radius $PF = r$ um den Mittelpunkt der Scheibe P (Fig. 70). Im Anfangspunkte sei PF nach links in die Richtung der Abszissenachse gestellt. Da sich die Scheibe $2n\pi$-mal herum dreht, wenn sie die Kurve entlang von A bis B geführt wird, so entspricht einer Strecke x ein Drehungswinkel $n\pi\frac{x}{u} = n\theta$, wenn $\frac{\pi}{u}x = \theta$ gesetzt wird. Die Koordinaten ξ, η von F sind dann folgende, wenn x, y diejenigen von P sind:

$$\xi = x - r\cos n\theta \qquad \eta = y + r\sin n\theta.$$

Daher ist die vom Planimeterstift umfahrene Fläche

$$\int \eta d\xi = \int y dx + nr\int y \sin n\theta d\theta + r\int \sin n\theta dx + nr^2 \int \sin^2 n\theta d\theta.$$

Die beiden letzten Integrale verschwinden, wenn sie sich über eine geschlossene Kurve erstrecken, also die obere und untere Grenze für x bzw. θ dieselbe ist. Beim zweiten Integral ist der Wert derselbe, ob man es über die Kurve von A bis B nimmt, oder ob man die Fläche ganz umfährt, also auch von B nach A in der Abszissenachse zurückgeht, da diese letztere Strecke keinen Beitrag zu dem Integrale liefert, sondern $y = 0$ bleibt. Setzen wir

$$\int y\,dx = f \quad \text{und} \quad \int \eta\,d\xi = B_n,$$

so ist, wenn noch $r = \frac{10}{\pi}$ eingesetzt wird (vgl. (2) S. 132):

$$B_n = f + 10n \cdot b_n.$$

Wird die Scheibe im Anfangspunkte A so gestellt, daß PF mit der positiven Richtung der y-Achse zusammenfällt, so ist

$$\xi = x + r\sin n\theta \qquad \eta = y + r\cos n\theta,$$

also

$$A_n = \int \eta\,d\xi = \int y\,dx + nr\int y\cos n\theta\,d\theta + r\int \cos n\theta\,dx + nr^2\int \cos^2 n\theta\,d\theta$$

und entsprechend wie vorher

$$A_n = f + 10n \cdot a_n, \quad B_n = f + 10n \cdot b_n.$$

Jede Scheibe n liefert also ein Koeffizientenpaar a_n, b_n. (f wird mit einem Planimeter gemessen.)

47. Apparat von Le Conte. Bei dem Apparat von Le Conte sind auf einer Grundplatte ein Schienenpaar (DE, FG Fig. 71),

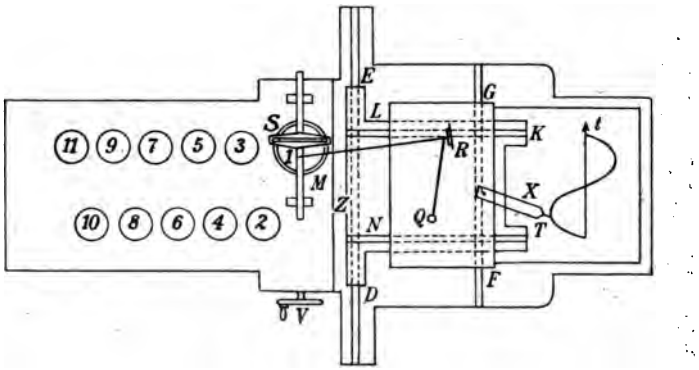


Fig. 71.

auf dem ein Wagen läuft, und elf Zahnräder angeordnet, die durch eine Kurbel V in Umdrehung gesetzt werden und zwar macht jedes Rad bei einer Kurbeldrehung seiner Numerierung entsprechend 1, 2, 3 ... usf. Umdrehungen. Der Wagen wird durch dieselbe Handkurbel bei einer Umdrehung des Rades 1 um die Strecke,

die einer Periode entspricht, vorwärts bewegt. Ein zweites Schienenpaar (LK, NT), das auf dem Wagen rechtwinklig zum ersten angebracht ist, trägt einen zweiten Wagen, an dem der Fahrstift X angebracht ist. Durch die Bewegung des ersten Wagens wird er parallel der x-(in der Fig. t-)Achse geführt, während seine Einstellung auf die Ordinatenendpunkte eine Verschiebung des zweiten Wagens verursacht.

Das Folgende wird durch die Überlegung verständlicher, daß die Projektion eines gleichförmig im Kreise sich bewegenden Punktes auf einen Durchmesser des Kreises eine harmonische Bewegung ausführt.

Das Zahnrad 1 (und ebenso jedes der übrigen) trägt einen exzentrischen Stift S, der in einen Schlitz eingreift. Der Schlitz befindet sich in dem kürzeren Arm eines kreuzförmigen Schlittens, dessen längerer, der x-Achse paralleler Arm durch die Bewegung von S sich längs eines Durchmessers des Rades hin- und herschiebt. Wenn sich S im Kreise um den Mittelpunkt des Rades dreht, so vollführt seine Projektion auf den der x-Achse parallelen Durchmesser eine harmonische Bewegung ($r\cos\theta$ bzw. $r\sin\theta$, je nachdem die Anfangsstellung des Stifts in dem der y- oder x-Achse parallelen Durchmesser sich befand). Setzt man auf den Schlitten M den Fahrstift eines Polarplanimeters, so beschreibt dieser daher dieselbe Bewegung. Der Pol Q und die Meßrolle R des Planimeters, werden auf den zweiten Wagen aufgesetzt. Wenn der Fahrstift des Analysators und mit ihm der zweite Wagen in der y-Achsenrichtung verschoben werden, so wird dabei dasselbe erreicht, als wenn bei ruhender Planimeterebene der Fahrstift des Planimeters in der entgegengesetzten Richtung der y-Achse geführt wird. Die Theorie ist genau dieselbe, wie beim vorigen Planimeter.

Um die Koeffizienten $a_2 \ldots a_{11}$, $b_2 \ldots b_{11}$ zu erhalten, wird der Planimeterfahrstift auf die (in der Figur fehlenden) Schlitten der anderen Räder gesetzt.

48. Analysator von W. Thomson. Älter als die genannten Instrumente ist der 1876 von William Thomson (Lord Kelvin) konstruierte Analysator[1]), der an das von seinem Bruder James Thomson erfundene Planimeter anknüpft.

1) Proceedings of the Royal Society of London, XXIV, 1876.

Wir denken uns (ähnlich wie bei A. Schmidts Planimeter, S. 116, vgl. auch S. 133) die auszumessende Kurve $y = f(x)$ um einen horizontalen „*Kurvenzylinder*“ gelegt, so daß die x-Achse etwa mit dem Grundkreise zusammenfällt und die y-Achse der Zylinderachse parallel ist. Durch Zahnradübertragung wird der Achse A einer Scheibe D eine mit der Drehung dx des Zylinders proportionale Drehung $p\,dx$ erteilt (Fig. 72). Diese Scheibe ist gegen die Horizontalebene um 45^0 geneigt und auf ihr rollt eine frei bewegliche Kugel B, die durch einen zweiten horizontalen Zylinder C, den wir zum Unterschied den „*Registrierzylinder*“ nennen, und der die Scheibe nicht berührt, längs des horizontalen Durchmessers der Scheibe

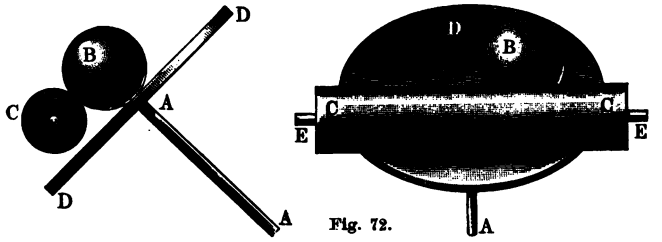


Fig. 72.

zu rollen gezwungen wird. Die Kugel berührt demnach sowohl die Scheibe als den Zylinder und überträgt die Drehbewegungen der Scheibe durch Reibung auf den Zylinder, so daß bei einem Abstande y des Berührungspunktes der Kugel vom Mittelpunkt der Scheibe $p\,y\,dx$ die Drehung des Zylinders ist. Beide Zylinderachsen sind einander parallel und eine zu ihnen parallele Stange trägt an einem Ende den Fahrstift, der auf der jedesmal oben befindlichen Mantellinie des Kurvenzylinders auf den Kurvenpunkt eingestellt wird. Am anderen Ende der Stange befindet sich eine Gabel, welche die Kugel von oben faßt und längs des Registrierzylinders und des horizontalen Scheibendurchmessers hin- und herschiebt (vgl. Fig. 29). Wenn der Fahrstift auf der x-Achse steht, berührt die Kugel die Scheibe im Mittelpunkte, daher ist ihr Abstand von diesem immer gleich der Ordinate y der Kurve. In geeigneter Weise wird die Drehung des Registrierzylinders gemessen, die für ein Kurvenstück zwischen den Abszissen x_1 und x_2 den Integralwert $\int_{x_1}^{x_2} y\,dx$ bis auf einen konstanten von den Abmessungen des Instrumentes abhängigen Faktor gibt.

Diesen Planimeterapparat hat W. Thomson in folgender Weise zu einem Analysator abgeändert. Die Achse des Kurvenzylinders trägt einen Exzenter, also eine Vorrichtung, welche die Drehbewegung in eine geradlinige verwandelt. Eine Beschreibung ist nicht angegeben, doch kann man sich die Einrichtung wie beim Le Conteschen Analysator vorstellen, wo die Drehung der Scheibe in die geradlinige Schlittenbewegung verwandelt wird (vgl. S. 138). Durch Einschaltung verschiedener Zahnräder kann man erlangen, daß einer Umdrehung des Zylinders $\varkappa$ hin- und hergehende Bewegungen einer Stange entsprechen. Jeder Punkt der Stange macht also eine geradlinige Bewegung, deren Größe proportional $\sin \varkappa\theta$ bzw. $\cos \varkappa\theta$ ist, je nach der Anfangsstellung. Die Stange ist gezahnt, greift in den gezahnten Rand der Scheibe ein und erteilt ihr eine Drehung, bei der dx proportional $\cos \varkappa\theta \cdot \varkappa d\theta$ bzw. $\sin \varkappa\theta \cdot \varkappa d\theta$ ist. Mithin sind die Ablesungen am Registrierzylinder bis auf Faktoren, die von den Dimensionen des Instruments abhängen,

$$\int y \cos \varkappa\theta d\theta \quad \text{und} \quad \int y \sin \varkappa\theta d\theta,$$

also die gesuchten Koeffizienten $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$.

Sollen mehrere Koeffizienten gleichzeitig bestimmt werden, so müssen mit einem Kurvenzylinder und einem Führungsstift mehrere Integratoren verbunden werden, welchen ebenso viele Registrierzylinder zugehören. Der Apparat hat Fehler gezeigt, die von dem Gleiten der Kugel bei raschem Arbeiten herzurühren scheinen, auch berühren die Kugeln in kleinen Flächenstücken statt in Punkten.

49. Analysator von Henrici-Coradi. Vollkommener, aber auch komplizierter ist der Analysator von Henrici, der von Coradi konstruiert wurde. Er beruht auf dem sog. Henricischen Prinzipe, das die Koeffizienten a und b durch partielle Integration umwandelt, es ist nämlich:

$$a = \int_0^{2\pi} y \cos\theta \, d\theta = \Big[y \sin\theta \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin\theta \, dy$$

$$b = \int_0^{2\pi} y \sin\theta \, d\theta = \Big[-y \cos\theta \Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos\theta \, dy.$$

Die Integrale erstrecken sich über die ganze Periode, infolge dessen fällt das erste Glied auf der rechten Seite fort[1]) und das rechts stehende Integral hat eine wesentlich andere Form, als das links stehende.

Das Instrument von Henrici hat durch Sharp und namentlich durch Coradi wesentliche Verbesserungen erfahren und ist schließlich zu folgender Gestalt gelangt:

Ein festes Gestell, dessen Grundriß ein langes Rechteck ist, ruht mit drei Rollen auf der Zeichenebene. Eine von ihnen, vorn in der Mitte gelegen, dient nur als Stütze, die beiden anderen sind an den Enden einer langen Achse angebracht. Wir bezeichnen sie als Haupt-

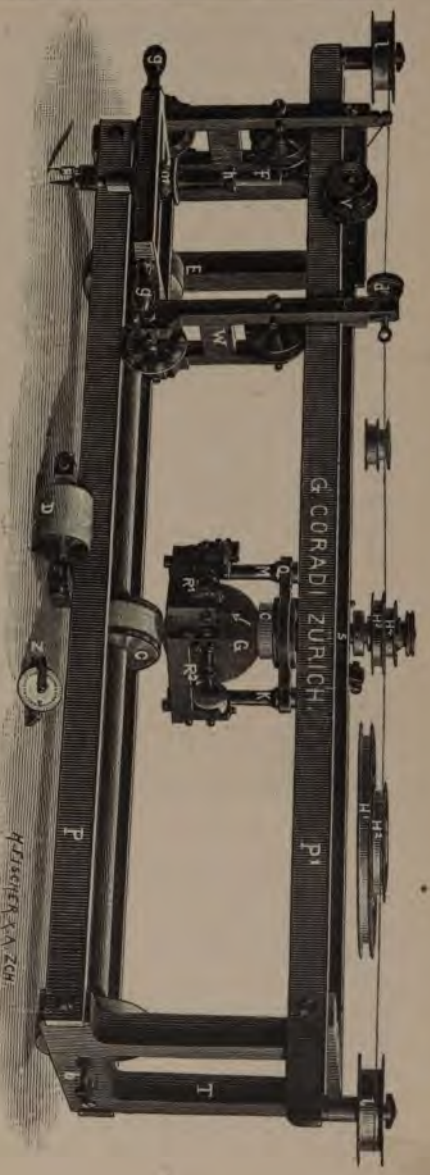


Fig. 73.

1) Dies ist nur dann nicht der Fall, wenn die Ordinate einen Sprung macht, also wenn die Kurve eine Unstetigkeitsstelle besitzt. Seien in diesem Falle die zu einem Abszissenwerte x gehörenden Kurvenpunkte P_1 und P_1' mit den Ordinaten y_1 und y_1' und θ' der zugehörige Wert von θ, so tritt bei a hinzu: $(y_1 - y_1')\sin\theta'$, bei b hinzu: $(y_1' - y_1)\cos\theta'$. Für $\theta' = 0$ oder 2π wird der erste Ausdruck null.

achse und wählen ihre Richtung als x-Achse, so daß das Instrument in der Richtung der Ordinaten y rollt. Bewegt es sich um ein Stück dy, so drehen sich die Rollen um $d\varphi = p\,dy$, wo p ein Proportionalitätsfaktor ist. Auf der Hauptachse sitzt eine Anzahl unter einander gleicher walzenförmiger Zylinder O (in der Figur ist nur einer gezeichnet), über deren jedem ein Integrator mit vertikaler Achse angebracht ist, der je einen der Koeffizienten a_x, b_x liefert. Die geometrischen Mittellinien dieser Vertikalachsen schneiden sämtlich die Hauptachse und zwischen diesen Vertikalachsen oder Zapfen, wie wir sie nennen wollen und den walzenförmigen horizontal liegenden Zylindern liegt jedesmal eine Glaskugel G Die Zapfen C sind in dem hinteren erhöhten Rahmen s befestigt.

Bevor wir die Integratoren eingehender beschreiben, betrachten wir die Vorrichtung, welche eine Drehung der Zapfen bewirkt. Entlang der Vorderseite P des Rahmengestells läuft ein Wagen W, an dem der Fahrstift F befestigt ist, der einen Weg gleich der Basis u der gezeichneten Kurven durchlaufen kann, die also den Dimensionen des Instruments angepaßt werden muß. An dem Wagen ist oben ein Silberdraht befestigt, der auf der Vorderseite des Rahmens entlang gespannt ist und, über zwei horizontale Führungsrollen l an beiden Enden des Apparats geführt, sich um kleine Scheiben H schlingt, die ebenfalls horizontal oben auf den Zapfen befestigt sind. Durch passende Wahl der Durchmesser dieser Scheiben wird es erreicht, daß sich der Zapfen $\varkappa$-mal um seine Achse dreht, wenn der Stift die ganze Basis durchläuft. Die Durchmesser dieser Schnurscheiben verhalten sich wie $1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{5}$ usf. Wenn sich also der Fahrstift um x bewegt, so drehen sich die Scheiben um ϑ, 3ϑ, 5ϑ usf., wenn $\vartheta = \frac{2\pi x}{u}$ ist.

Mit jedem Zapfen ist unten ein horizontaler viereckiger Rahmen verbunden (Fig. 73). Zwei Seiten desselben werden von den Achsen zweier Integrierrollen R_1 R_2 (Fig. 74) gebildet, welche die erwähnte, im Innern des Rahmens liegende Glaskugel G berühren, die von der dem Schnitt L der Rollenachsen gegenüberliegenden Ecke aus durch eine Führungsrolle r an die Integrierrollen angedrückt wird.[1]) Bewegt sich der Fahrstift in der Richtung der x-Achse bis zum Punkte x, so dreht sich die Zapfenscheibe mit dem Radius

1) Die Anordnung der Kugel mit zwei Meßrollen rührt von Max Küntzel, Markscheider in Charlottenhof bei Königshütte O/S her.

$\frac{1}{\varkappa}$ um $\varkappa\vartheta$ (in der Figur mit $k\omega t$ bezeichnet, mit t die x-Achse) und die Integrierrolle R_1 bildet, wenn sie vorher der x-Achse parallel war, jetzt den Winkel $\varkappa\vartheta$ mit ihr; die Ebene der Integrierrolle R_2 wird den Winkel $90^0 + \varkappa\vartheta$ mit der x-Achse einschließen. Wird der Apparat um dy fortgerollt, so wird die Drehung der Zylinderwalze $p\,dy$ sich der Kugel mitteilen, die demnach $c\,dy$ sei, und die Integrierrollen werden, da die Kugel sich senkrecht zur x-Achse um einen dieser parallelen Durchmesser dreht, sich proportional $c\,dy\cos\varkappa\vartheta$ bzw. $c\,dy\sin\varkappa\vartheta$ drehen. Bei einer Bewegung des Fahrstifts längs der Kurve werden daher von den Registrierrollen die Koeffizienten

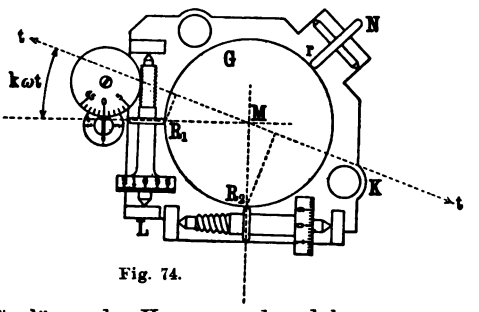


Fig. 74.

$$a_x = c\int dy\cos\varkappa\vartheta \quad \text{und} \quad b_x = c\int dy\sin\varkappa\vartheta$$

geliefert. Um nicht zu viele Integratoren nötig zu machen, sind an jedem Zapfen mehrere Schnurscheiben von verschiedenem Durchmesser vorgesehen, über welche der Silberdraht geführt werden kann.[1])

50. Analysator von Sharp. Der Analysator von Sharp hat wiederum ein auf drei Rollen laufendes Gestell, das aber im Grundrisse die Gestalt eines doppelten U hat (Fig. 75). Die Enden der drei Arme liegen in gerader Linie, die Richtung der Arme wählen wir als Richtung der Abszissen (in der Figur t). An den Enden der beiden äußeren Arme F befinden sich Rollen W_1, W_2, W_3 von verschiedenem Durchmesser im Verhältnis $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ usf., die auf der Papierebene oder

1) Wenn die Achsen der Zapfen nicht über den Kugelmittelpunkten M liegen, so entstehen Fehler, die sich aber durch Befahren der Kurve in entgegengesetzter Richtung eliminieren lassen. Bezüglich aller Einzelheiten der Konstruktion, der Behandlung des Instruments und der Fehlertheorie muß auf die eingehende Theorie des harmonischen Analysators von Dr. L. Grabowski (Sitzungsberichte der math. naturw. Klasse der K. Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. 110, Abt. IIa, S. 717—889, Wien 1901) verwiesen werden. Das dort mitgeteilte Beispiel zeigt, wie die Resultate durch Anbringung von Korrektionen wesentlich verbessert werden.

auf Leisten laufen. An dem rückwärts verlängerten Mittelarm sitzt noch eine Stützrolle W. An seinem Ende M trägt dieser Mittelarm eine Scheibe D_1, die sich durch Zahnradübertragung bei der Bewegung des Apparats um das ganze Abszissenintervall u einmal herumdreht (bei Anwendung der Rollen mit dem größten Durchmesser, bzw. $\varkappa$mal bei den Rollen vom Durchmesser $\frac{1}{\varkappa}$). Bei einer Bewegung des Instruments um x dreht sie sich um $\vartheta = \frac{2\pi}{u} x$ (bei Verwendung der Rollen mit dem Durchmesser $\frac{1}{\varkappa}$ um $\varkappa\vartheta$).

Auf dem langen Rahmen, an dem die drei Arme sitzen, bewegt sich auf einer Schiene S ein Wagen in der Richtung der y-Achse, der einen Arm G trägt, der den vorigen parallel liegt. Dieser Arm führt einen Zeichenstift N, der auf einer, wie wir gleich

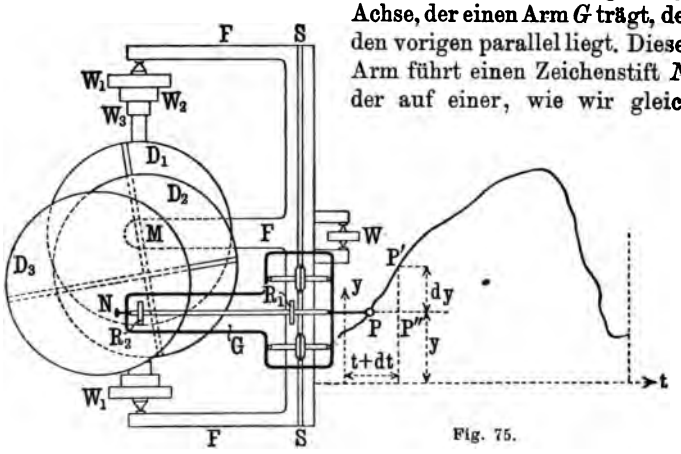


Fig. 75.

sehen werden, mit der bereits genannten Scheibe D_1 sich drehenden Scheibe D_3 zeichnet und in seiner Rückverlängerung den Fahrstift P, der entlang der gegebenen Kurve geführt wird. Weil nämlich die Scheibe D_1 fest sitzt, und der Wagen sich in der y-Richtung bewegt, so mußte eine in gewissen Grenzen mit dem Schreibstift N mitgehende Scheibe angebracht werden. Deshalb ist auf D_1 längs eines Durchmessers eine Führungsleiste angebracht, die in eine entsprechende Nut längs des Durchmessers einer zweiten Scheibe D_2 eingreift. In derselben Weise steht mit D_2 eine dritte Scheibe D_3 in Verbindung. D_3 trägt auf der Unterseite eine Führungsleiste, die in einer auf D_2 befindlichen, zur anderen senk-

recht verlaufenden Nut sich verschiebt. Da nun neben dem Zeichenstift eine Friktionsrolle R_2 an dem beweglichen Arm angebracht ist, welche die mit Papier überzogene Scheibe D_3 im Berührungspunkte festhält, so dreht sich D_3 um diesen Punkt um denselben Winkel ϑ bzw. $\varkappa\vartheta$, wie die Scheibe D_1, wenn das Instrument um eine Strecke x (Richtung t in der Figur) fortrollt. Wenn dagegen der Wagen um dy bewegt wird, so rollt das Friktionsrädchen, und mit ihm bewegt sich der Zeichenstift um diesen Betrag. Hat man in der Anfangslage der Scheibe D_3 Parallele zur x- und y-Achse gezogen, so hat sich dieses Koordinatenkreuz um ϑ gedreht, daher sind die Komponenten von dy, abgesehen vom Vorzeichen $\cos\vartheta dy$ und $\sin\vartheta dy$ und bei Durchfahrung der ganzen Kurve erhält man $\int\cos\vartheta dy$ und $\int\sin\vartheta dy$ bzw. $a_\varkappa=\int\cos\varkappa\vartheta dy$ und $b_\varkappa=\int\sin\varkappa\vartheta dy$ bei Einschaltung der Rollen mit dem Durchmesser $\frac{1}{\varkappa}$. Die Verbindungsgerade des Anfangs- und Endpunkts der auf der Scheibe dargestellten Kurve liefert dann die Periode $\gamma_\varkappa$ und die Amplitude $i_\varkappa$ durch

$$\frac{b_\varkappa}{a_\varkappa}=\operatorname{tg}\gamma_\varkappa \quad \text{und} \quad i_\varkappa=\sqrt{a_\varkappa^2+b_\varkappa^2}$$

und damit die Koeffizienten bei der Darstellung der Kurve in der Form: $i=\int i_\varkappa\sin(\varkappa\vartheta+\gamma_\varkappa)$, wo $b_\varkappa=i_\varkappa\sin\gamma_\varkappa$, $a_\varkappa=i_\varkappa\cos\gamma_\varkappa$ ist.

51. Präzisionsinstrument von Sommerfeld und Wiechert. Ein Präzisionsinstrument ist der harmonische Analysator von A. Sommerfeld und E. Wiechert, konstruiert von Volkmann und Gross in Königsberg i/P., 1890.[1])

Die Maschine besteht in den Hauptteilen aus einem horizontal liegenden Zylinder $abcd$ (Fig. 76), der erstens um seine Umdrehungsachse und zweitens um eine Vertikalachse C, die wir Konstruktionsachse nennen, drehbar ist. Parallel der Konstruktionsachse ist die sogenannte Integrationsachse J angebracht, um die sich eine horizontale kreisförmige

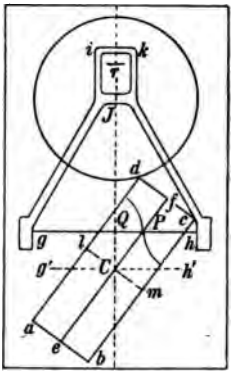


Fig. 76.

1) Sitzungsberichte der physik.-ökonomischen Gesellsch. zu Königsberg, Bd. **32**, S. 28, 1891.

Scheibe dreht. Wenn sich der Zylinder um seine Rotationsachse um einen Winkel ϑ dreht, so dreht sich die Scheibe um denselben Winkel, und gleichzeitig dreht sich durch eine noch zu erwähnende Vorrichtung der Zylinder um die Konstruktionsachse, also im azimutalen Sinne, um den Winkel $k\vartheta$. Die gegebene Kurve ist auf dem mit Papier überspannten Zylinder aufgezeichnet.[1]) Die bei seiner Drehung jeweilig oberste Mantellinie wird durch einen längs derselben gespannten Faden ef markiert. Derjenige Punkt P der Kurve, der unter diesen Faden kommt, wird mittels eines andern ebenfalls horizontal liegenden Fadens gh eingestellt. Dieser Einstellfaden läßt sich durch einen Schieber (Wagen ik) parallel verstellen. Am Ende des Schiebers befindet sich eine Integrierrolle (r), deren Achse der Verschiebungsrichtung parallel ist. Die Rolle liegt auf der Scheibe auf und verschiebt sich längs eines Durchmessers derselben. Bei der Einstellung des beweglichen Fadens $g'h'$ auf die x-Achse der Kurve, die einen dem Grundkreis des Zylinders parallelen Kreis bildet, berührt die Rolle die Scheibe im Mittelpunkt. Der Abstand des Berührungspunkts der Rolle vom Mittelpunkt der Scheibe mißt also $y\cos k\vartheta$ oder $y\sin k\vartheta$, je nachdem die Zylinderachse den Winkel $JCP = k\vartheta$ oder $\frac{\pi}{2} - k\vartheta$ mit der Schieberrichtung einschließt, wobei ϑ der der Abszisse x entsprechende Winkel, $\vartheta = \frac{2\pi x}{u}$, ist, und u den Umfang des Zylinders bezeichnet. Bei einer Winkeländerung $d\vartheta$, welche sowohl die Umdrehungsbewegung des Zylinders, wie die der Scheibe betrifft, wird daher die Rolle den Weg $y\cos k\vartheta \cdot d\vartheta$ oder $y\sin k\vartheta \cdot d\vartheta$ abwickeln; bei einer vollen Umdrehung des Zylinders um seine Achse erhält man als Ablesungen der Integrationsrolle

$$a_x = \int_0^{2\pi} y\cos k\vartheta\, d\vartheta \text{ bzw. } b_x = \int_0^{2\pi} y\sin k\vartheta\, d\vartheta.$$

1) Die Kurve kann von dem Apparate selbst aufgezeichnet werden; zu diesem Zwecke wird die Zylinderachse der Schieberrichtung parallel gestellt. Am Schieber wird ein Zeichenstift angebracht, dem man mit Hilfe einer Skala eine der y-Koordinate entsprechende Stellung geben kann. Gleichzeitig wird dem Zylinder eine wachsenden Abszissen x entsprechende Drehung erteilt und der Zeichenstift heruntergedrückt. Dieser zeichnet durch eine ihm erteilte Rotationsbewegung einen kleinen Kreis, dessen Mittelpunkt unabhängig von einer etwa vorhandenen Exzentrizität des Stifts den richtigen Punkt bezeichnet.

Die Drehung des Zylinders im azimutalen Sinne beruht auf folgender Einrichtung (Fig. 77): Die vertikale Achse, um die sich der Zylinder dreht und die mit der Konstruktionsachse C zusammenfällt, ist zugleich Achse eines in der Nähe ihres unteren Endes angebrachten horizontalen Rades r_1, dessen Radius wir ebenso bezeichnen, wie auch im folgenden entsprechend bei anderen Rädern. Sie ruht mit ihrem unteren Ende auf dem Boden einer Kapsel K, die ihrerseits mit einer Kernspitze in einem Block G drehbar angebracht ist. Diese Kapsel weitet sich nach oben in einen Kreisring T aus, auf dessen horizontaler glatter Fläche ein Stahlrad S im Kreise um die Achse C läuft. Mit diesem äußeren System, zu dem die Kapsel gehört, schwingt sich ein an ihr angebrachtes Gehäuse H mit herum, in das ein Räderpaar $r_3 r_4$ mit vertikaler Achse eingesetzt werden kann. Das eine Rad r_4 dieses Paares berührt das Rad r_1 durch Reibung[1]), während das andere tiefer liegende Rad r_3 dem kreisförmig abgeschliffenen Blocke G mit dem Radius r_2 gegenüber liegt.

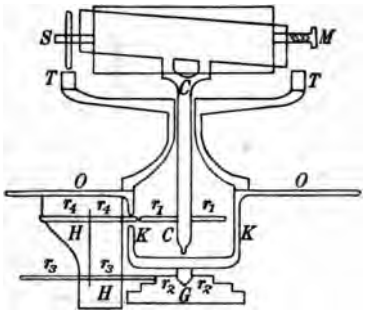


Fig. 77.

Wird dem äußeren System eine Drehbewegung um die Konstruktionsachse um einen Winkel φ erteilt, so legt der Berührungspunkt des Rades r_3 den Weg $r_2\varphi$ am kreisförmigen Rande des Blockes G zurück, wobei r_3 eine Drehung um den Winkel χ erfährt und $r_3\chi = r_2\varphi$ ist. Mithin dreht sich das auf derselben Achse mit r_3 sitzende Rad r_4 ebenfalls um χ, und ein Punkt seines Umfangs beschreibt den Weg $r_4\chi$. Da aber außerdem das ganze äußere System sich gleichzeitig um den Winkel φ um die Konstruktionsachse gedreht hat, so beschreibt der Berührungspunkt des Rades r_4 mit dem Rade r_1 im ganzen den Bogen $r_4\chi + r_1\varphi$, und diesem Bogen ist der von dem Berührungspunkte des Rades r_1 infolge der Reibung zurückgelegte Weg gleich:

$$r_1\psi = r_4\chi + r_1\varphi,$$

1) Es sind nirgends Zahnräder, sondern überall Reibungsräder zur Anwendung gekommen.

mithin ist

$$\psi = \frac{r_4}{r_1}\frac{r_2}{r_3}\varphi + \varphi = \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\frac{r_4}{r_3}\right)\varphi.$$

Bei der Drehung ψ des inneren Systems und damit auch des Zylinders um die Achse C läuft das Stahlrad S auf dem Ringe, und wenn R der Radius dieses Ringes ist, so legt sein Berührungspunkt den Weg $R(\psi - \varphi)$ zurück, da ja der Ring sich mit dem äußeren System um dieselbe Achse dreht. Das Rad wird dabei den Bogen $S\vartheta$ abwickeln. Nun sitzt S auf der Umdrehungsachse des Zylinders, der daher um denselben Winkel ϑ rotiert. Er wird durch die Gleichung bestimmt:

$$\vartheta = \frac{R}{S}(\psi - \varphi) = \frac{R}{S}\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3}\varphi.$$

Wird umgekehrt dem Zylinder eine Drehung um seine Umdrehungsachse um den Winkel ϑ erteilt, so kann man die Dimensionen der Räder so wählen, daß die horizontale Drehung des Zylinders um die Konstruktionsachse

$$\varphi = \frac{S}{R}\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\vartheta = k\vartheta$$

wird. Auch läßt sich R durch eine mikrometrische Einstellung M innerhalb enger Grenzen ändern. Für die verschiedenen Koeffizienten werden andere Räderpaare $r_3 r_4$ eingesetzt und statt r_2 sind im ganzen drei Radscheiben vorhanden, aus denen sich der Block G terrassenförmig aufbaut.

52. Analysator von Michelson und Stratton. Der Analysator von Michelson und Stratton (Fig. 78) dient den beiden Aufgaben, die Kurve zu einer gegebenen Fourierschen Reihe zu zeichnen und zu einer gegebenen Kurve die Koeffizienten zu finden.

Eine Achse D trägt n (= 80) Zahnräder, denen n (= 80) Exzenter A gegenüberstehen, in die sie eingreifen. Wir betrachten (s. Fig. 79) nur ein Zahnrad und einen Exzenter, der bei einer Umdrehung der Achse $\varkappa$ Umdrehungen machen möge. Die Bewegung des Exzenters wird durch den Hebel B auf die Stange R und auf den Punkt x übertragen. Dabei ist die Länge d des Hebelarms regulierbar. Die auf- und abgehende Bewegung von x ist dann proportional $z_x = d_x \sin \varkappa\vartheta$, wenn ϑ der Drehungswinkel des Zahnrads ist. Jeder der 80 Punkte x ist durch je eine, bei allen gleiche Spiralfeder s mit je einem Hebelarm u verbunden, der an

einem langen Hohlzylinder C, der auf zwei Schneiden ruht, senkrecht zu dessen Achse angebracht ist. Durch eine andere Feder S, welche an einem gegenüberstehenden Hebelarm wirkt und den sämtlichen Federn s das Gleichgewicht hält, wird die Drehbewegung des Zylinders gedämpft. Der Hebel u trägt einen Draht w, durch den die Bewegung des Zylinders auf eine Schreibfeder übertragen wird, welche auf einer tafelförmigen Scheibe die Kurve aufzeichnet. Diese Scheibe verschiebt sich bei einer vollen Umdrehung von D um das Abszissenintervall u.

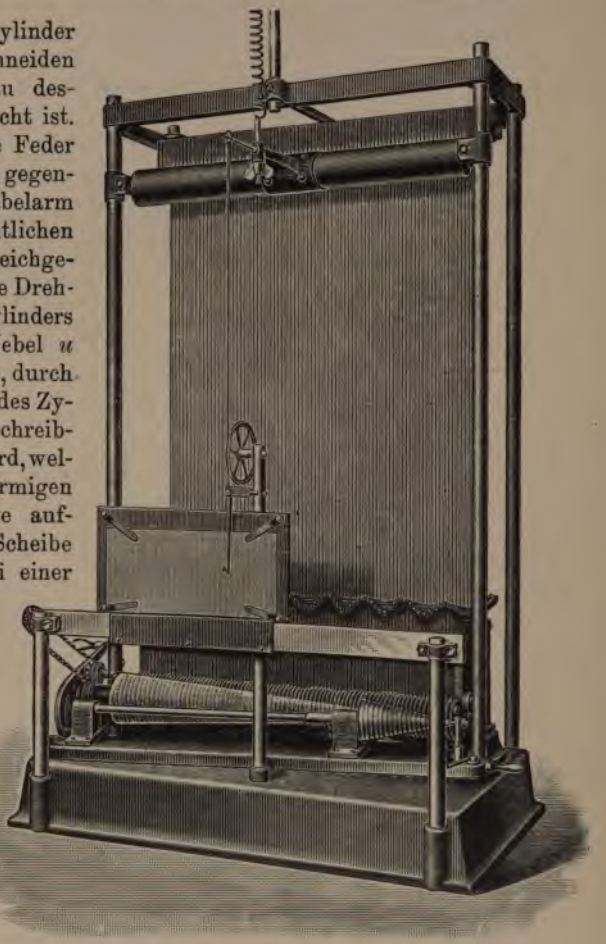


Fig. 78.

Sind l und L die natürlichen Längen der Federn s und S und werden ihnen durch Drehung der Zahnradachse Verlängerungen x bzw. y erteilt, so sind ihre Zugkräfte

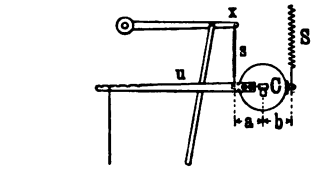
$$p = \frac{e}{l}(l + x_x), \qquad P = \frac{E}{L}(L + y),$$

worin e und E die Kräfte für ihre natürlichen Längen sind ($x_x = 0$, $y = 0$). Ist a der Hebelarm der kleinen Federn, b der Hebelarm

der großen Feder, so wird Gleichgewicht eintreten, wenn $a\,\Sigma p = b\,P$ ist oder

$$a\,\frac{e}{l}\sum(l + x_\varkappa) = b\,\frac{E}{L}(L + y)\,.$$

Hierbei setzt sich $x_\varkappa$ aus zwei Teilen zusammen, der Verschiebung $z_\varkappa$ des Aufhängungspunktes der Feder und der durch die Wirkung der großen Feder bewirkten Verkürzung ξ, die proportional der Verlängerung y der großen Feder gesetzt werden kann, so daß



$$\xi = \frac{a}{b}\,y$$

wird. Dann folgt

$$a\,\frac{e}{l}\sum_{\varkappa=1}^{n}\left(l + z_\varkappa - \frac{a}{b}\,y\right) = b\,\frac{E}{L}\,(L + y)\,.$$

Im Anfangszustand ist $nae = bE$, also wird[1])

$$y = \frac{\Sigma z_\varkappa}{n\left(\frac{l}{L} + \frac{a}{b}\right)}\,.$$

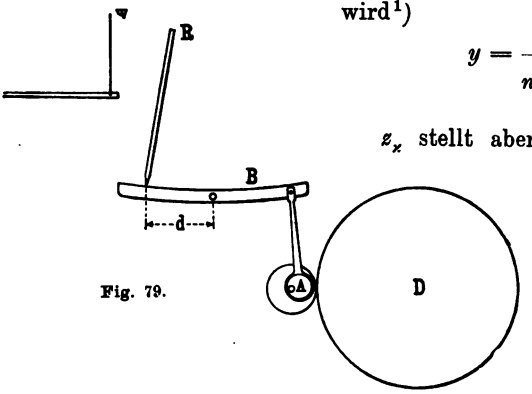


Fig. 79.

$z_\varkappa$ stellt aber die harmonische Bewegung des Punktes x dar: $z_\varkappa = d_\varkappa \sin \varkappa\vartheta$ Wenn man also $d_\varkappa = a_\varkappa$ macht, so erhält man für $\varkappa = 1, \ldots n$: $\Sigma z_\varkappa = \Sigma a_\varkappa \sin \varkappa\vartheta$, die Summe der sinus-Glieder der Fourierschen Reihe. Macht man die Achse D mit ihren einen Konus bildenden Zahnrädern frei, so kann man mit Hilfe eines langen Getriebes alle Exzenter auf einmal um 90^0 drehen und erhält dann, wenn man $d_\varkappa = b_\varkappa\,(\varkappa = 1 \ldots n)$ macht,

1) $$\frac{1}{n}\left(\frac{\Sigma l}{l} + \frac{\Sigma z_\varkappa}{l} - \frac{n}{l}\,\frac{a}{b}\,y\right) = \frac{L + y}{L}\,.$$

Hier ist $\Sigma l = n\,l$, also

$$\frac{\Sigma z_\varkappa}{nl} - \frac{1}{l}\,\frac{a}{b}\,y = \frac{y}{L} \quad \text{und} \quad y\left(\frac{l}{L} + \frac{a}{b}\right) = \frac{\Sigma z_\varkappa}{n}\,.$$

$\Sigma z_\varkappa' = \Sigma b_\varkappa \cos \varkappa\vartheta$. Man erhält auf einmal entweder nur eine sinus- oder eine cosinus-Reihe.

y ist aber $\Sigma z_\varkappa$ proportional, und die Bewegung des Zeichenstiftes ist mit y proportional, mithin erhält man bei passenden Abmessungen des Apparats das Bild der durch $a_\varkappa$ oder $b_\varkappa$ gegebenen Kurve.

Soll dagegen eine gegebene Kurve analysiert werden, so nimmt die Aufgabe im vorliegenden Falle folgende Form an: Es sind $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ zu bestimmen aus den Gleichungen (5) S. 133:

$$n a_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{2n} y_\lambda \cos \varkappa\theta_\lambda, \qquad n b_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{2n} y_\lambda \sin \varkappa\theta_\lambda, \qquad \varkappa = 1 \ldots n,$$

wobei $\theta_\lambda = \frac{2\pi x_\lambda}{u}$ ist. Wir teilen das Abszissenintervall u der gegebenen Kurve in $2n = 80$ gleiche Teile, so daß

$$\frac{x_\lambda}{u} = \frac{\lambda}{80} \quad \text{und} \quad \theta_\lambda = \frac{2\pi\lambda}{80} \; (\lambda = 1, 2 \ldots 80)$$

wird und errichten in den Teilpunkten die Ordinaten y_λ. Diesen machen wir die 80 Hebelarme gleich: $d_\varkappa = y_\lambda$ und zeichnen durch Drehung der Kurbel der Zahnräderwelle D die zugehörigen Kurven, deren Ordinaten wir zum Unterschied mit z und z' bezeichnen. Wir erhalten dann entsprechend den Gleichungen (4) S. 133:

$$z_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{80} d_\varkappa \cos\left(\varkappa\lambda \frac{2\pi}{80}\right), \qquad z_\lambda' = \sum_{\varkappa=1}^{80} d_\varkappa \sin\left(\varkappa\lambda \frac{2\pi}{80}\right).$$

Hier können wir offenbar $\varkappa$ und λ vertauschen, also auch schreiben:

$$z_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{80} y_\lambda \cos\left(\varkappa\lambda \frac{\pi}{40}\right), \qquad z_\lambda' = \sum_{\lambda=1}^{80} y_\lambda \sin\left(\varkappa\lambda \frac{\pi}{40}\right),$$

d. h. es ist $z_\lambda = 40 a_\varkappa$, $z_\lambda' = 40 b_\varkappa$. Wenn wir also für die zuletzt erhaltenen Kurven das einer vollen Periode entsprechende Abszissenintervall wiederum in 80 Teile teilen, so ist die zum λ^{ten} Teilpunkte gehörige Ordinate z_λ bzw. z_λ' das 40 fache des gesuchten Koeffizienten $a_\varkappa$ bzw. $b_\varkappa$.

Dieser Apparat wird seine Anwendung finden, wenn es nicht auf äußerste Genauigkeit ankommt, sondern Fehler von 1 bis 2 % gestattet sind. Dafür liefert er in schnellster Weise die Kurven mit

Berücksichtigung der Glieder vom 80 fachen Winkel und es ließe sich diese Zahl noch leicht vermehren.

53. Apparat von Terada zur Analyse und Synthese von Schwingungen. Der Analysator von Terada, der zwar auch zur Analyse von gegebenen Kurven benutzt werden kann, dient in erster Linie zwei anderen Aufgaben, nämlich erstlich zu einer gegebenen Kurve, für deren Grundschwingung Amplitude und Periode bekannt sind (so daß man sie an den Skalen des Apparates einstellen kann), die Kurve der Oberschwingungen zu zeichnen und zweitens aus den einzelnen gegebenen Schwingungen die zusammengesetzte Kurve darzustellen.

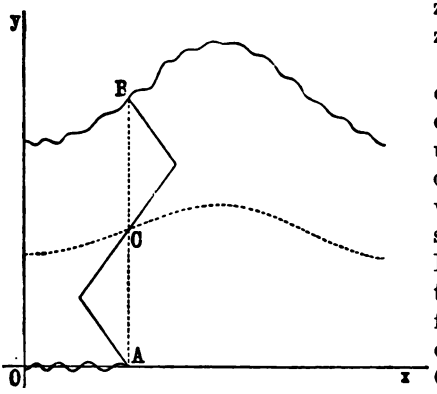


Fig. 80.

Wir denken uns zunächst eine vom Punkte B (Fig. 80) durchlaufene Kurve gegeben und für diesen Punkt die Ordinate BA gezogen, dann wird ein dreiteiliges Gelenksystem, welches in B und A Führungs- bzw. Zeichenstifte trägt, entlang der Kurve geführt und der Apparat sorgt dafür, daß BA stets mit den Ordinaten von B zusammenfällt. Dem Mittelpunkte C des Gelenksystems wird nun eine vorgeschriebene harmonische Bewegung (Sinuskurve) mit Hilfe des Apparates erteilt. Da die Dreiecke, die das Gelenksystem mit der Ordinate bildet, gleichschenklig sind, so sind sie mit Rücksicht auf die Gleichheit der Winkel bei C auch in jedem Augenblicke kongruent.

Sind also in den drei Kurven die Ordinaten

des Punktes B $\quad y_1 = b_0 + b_1 \sin\vartheta + \sum_{x=2}^{\infty} b_x \sin x\vartheta$

„ „ C $\quad y_2 = \frac{b_0}{2} + \frac{b_1}{2}\sin\vartheta$

„ „ A $\quad y_3$,

so ist wegen

$$y_3 - y_2 = y_2 - y_1$$

$$y_3 = 2y_2 - y_1 = -\sum_{x=2}^{\infty} b_x \sin x\vartheta,$$

d. h. der Stift A zeichnet das Spiegelbild der Oberschwingungen. Man kann das Verfahren wiederholen und andere Oberschwingungen eliminieren, indem man z. B. bei C das Glied mit $\sin 2\vartheta$ hinzunimmt. Auch kann man eine Maßstabänderung für y_3 erhalten, wenn man $BC : CA = 1 : \mu$ macht, und dasselbe Verhältnis entsprechender Seiten der beiden Dreiecke durch Verschieben der Gelenke herstellt, ferner dem Punkte C die Bewegung

$$y_2 = \frac{\mu}{\mu + 1}(b_0 + b_1 \sin\vartheta)$$

erteilt. Dann wird wegen

$$y_3 - y_2 = \mu(y_2 - y_1)$$

$$y_3 = (\mu + 1)y_2 - \mu y_1,$$

also

$$y_3 = -\mu \sum_{x=2}^{\infty} b_x \sin x\vartheta.$$

Der Apparat besteht aus zwei Zeichenblöcken (Fig. 81), welche die in derselben Ebene liegenden Blätter für die von A und B beschriebenen Kurven tragen. Zwischen beiden befindet sich ein Wagen K, der sich auf Schienen bewegt, die der x-Achse parallel laufen. Dieser Wagen trägt einen Konus W, dessen Spitze nach unten gerichtet ist und der an der einen verstellbaren Schiene R_1 anliegt. Je nachdem diese Schiene, den Konus berührend, hinauf oder hinunter geschoben wird, erzielt man eine schnellere oder langsamere Umdrehung des Konus bei Bewegung des Wagens. Die Einstellung dieser Schiene wird daher die Periode bestimmen, in der sich ein oben auf dem Konus befindlicher Stift P um die Achse des Konus herumdreht. Dieser Stift kann nun in verschiedene Entfernung von der Achse gestellt werden, wodurch die Amplitude der durch ihn hervorgerufenen Bewegung des Punktes C bestimmt wird. Dieser Stift wird nämlich in dem der x-Achse parallelen Schlitz eines in der Richtung der y-Achse beweglichen Schlittens S geführt. Bei der Drehung des Stiftes um die Konusachse führt der Schlitten die Verschiebungen aus, welche die Pro-

jektion des Punktes P auf die y-Achse erfährt, und da der Punkt C mit ihm fest verbunden ist, so führt C ebenfalls eine harmonische Bewegung in der Richtung der y-Achse aus. Die Stifte A und B werden auch in der Richtung der y-Achse durch Schienen geführt, die mit dem Wagen fest verbunden sind. Die Gelenkver-

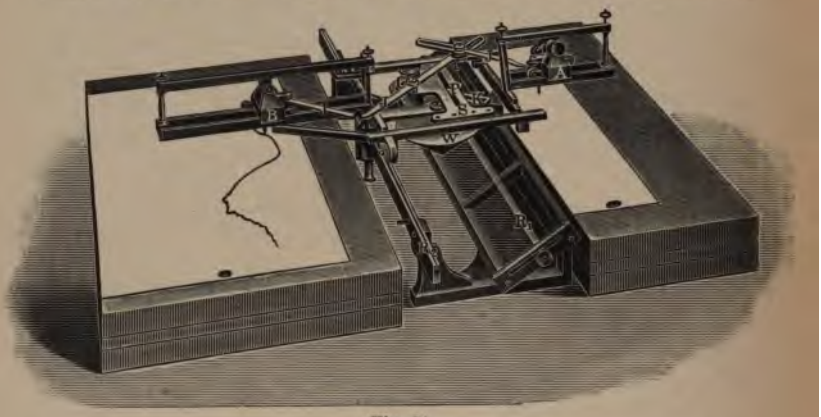


Fig. 81.

bindung JJ besteht in der oben beschriebenen Weise zwischen B, C und A. Die Gelenke selbst werden durch Schrauben gebildet, die durch Schlitze geführt und in diesen verstellbar sind.

Die zweite der genannten Aufgaben läßt sich folgendermaßen lösen. Man führt A auf einer Parallelen zur x-Achse, dann beschreibt B eine Sinuslinie (deren Amplitude und Periode an der Schiene R_1 und dem Stifte S eingestellt werden muß). Man bringt diese Sinuslinie unter A und stellt Amplitude und Periode der ersten Oberschwingung ein, so erhält man unter B die aus beiden Schwingungen zusammengesetzte und kann in dieser Weise fortfahren.

IX. Abschnitt.

Integraphen.

54. Grundlagen. Bei den in den voranstehenden Abschnitten behandelten Integrierapparaten wurden bestimmte Integrale zwischen gegebenen Grenzen erhalten, die Integraphen geben auch unbestimmte Integrale, indem sie, und dies ist ihr wesentlicher Unterschied, die Integralkurve graphisch aufzeichnen.

Wir nehmen an, die gegebene Kurve, die wir als Differentialkurve bezeichnen, habe die Gleichung $y = f(x)$, dann bezeichnen wir als Integralkurve die durch die Gleichung

$$Y = \int f(x)dx + C = F(x) + C$$

definierte Kurve.

Wir denken uns beide Kurven auf rechtwinklige Koordinatensysteme mit derselben y-Achse und parallelen x-Achsen, die um C von einander abstehen, bezogen ($O_1O_2 = C$). Die Gleichung für Y zeigt, wenn wir das Integral zwischen bestimmten Grenzen (z. B. x_1 für den Punkt O_1 und x_2 für den Punkt C) nehmen, daß die Ordinate (BC) eines Punktes (B) der Integralkurve den Inhalt der von der Differentialkurve, demselben Abszissenintervall und den zugehörigen Ordinaten begrenzten Fläche mißt. Wir wählen eine passende Strecke in der x-Achse als Längeneinheit, z. B. CD und tragen sie von dem Ordinatenfußpunkt C der Punkte A und B nach rückwärts ab, dann schließt die Verbindungslinie DA, die wir die Direktrix der Kurve $f(x)$ im Punkte A nennen, mit der x-Achse einen Winkel φ ein, der durch $\operatorname{tg}\varphi = y$ bestimmt ist, da ja $DC = 1$ angenommen ist.

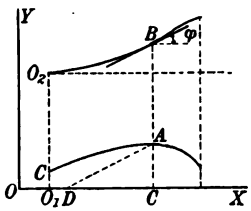


Fig. 82.

Andererseits ist $\frac{dY}{dx} = f(x) = y = \operatorname{tg}\varphi$, d. h. die Tangente der Integralkurve in einem Punkte B (x, Y) schließt mit der x-Achse denselben Winkel φ ein und ist daher der Direktrix in dem Punkte A, der auf der Ordinate von B liegt, parallel. Diese Eigenschaft kommt sämtlichen Integralkurven zu, deren es wegen der willkürlichen Konstante C unendlich viele gibt. Denkt man sich das Koordinatensystem so verschoben, daß der Anfangspunkt der Differentialkurve mit dem Koordinatenanfange zusammenfällt, so daß also in diesem Punkte $y = 0$ ist, so wird $Y = C$, und damit ist für einen gegebenen Wert von C die Lage der Integralkurve bestimmt. Ferner wird für jeden Schnittpunkt der Differentialkurve mit der x-Achse $y = 0$ und damit $\varphi = 0$, mithin ist in dem zu derselben Abszisse gehörenden Punkte der Integralkurve die Tangente der x-Achse parallel, und die Bedingung $\frac{dY}{dx} = 0$ drückt gleichzeitig

aus, daß die Ordinate der Integralkurve ein Maximum oder Minimum erreicht.

Erreicht die Ordinate der Differentialkurve ein Maximum oder Minimum, so ist $\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = 0$. Dann wird $\left|\frac{d^2Y}{dx^2}\right|_{x=x_0} = 0$, also hat die Integralkurve im allgemeinen einen Wendepunkt.

Ist ein Stück der Differentialkurve eine Parallele $y = b$ zur x-Achse, so ist $\frac{dY}{dx} = \operatorname{tg}\varphi = b$ und $Y = bx + c$ die Gleichung des entsprechenden Stückes der Integralkurve, die eine unter dem Winkel $\varphi = \operatorname{arctg} b$ geneigte Gerade darstellt. Ist umgekehrt die Differentialkurve eine geneigte Gerade $y = ax + b$, so ist $Y = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$, also die Integralkurve eine Parabel. Wenn man daher die Differentialkurve aus kleinen geraden Linienelementen entstehen läßt, also als einen Polygonzug ansieht, so wird die danach gezeichnete Integralkurve sich aus kleinen Parabelelementen zusammensetzen.

Ist die Differentialkurve ein Kreis, mit der Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - x}{y - b}.$$

Für die Punkte $x = a$, $y = b \pm r$ wird $\left|\frac{d^2Y}{dx^2}\right|_{x=a} = 0$. Die Integralkurve hat jedesmal einen Wendepunkt, wenn die Tangente der Differentialkurve der x-Achse parallel ist. Wenn die Tangente der Differentialkurve der y-Achse parallel ist, was in den Punkten $y = b$, $x = a \pm r$ stattfindet, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \infty, \quad \varphi = 90^0 \quad \text{und} \quad \left|\frac{d^2Y}{dx^2}\right|_{x=a\pm r} = \infty;$$

in diesem Falle hat die Integralkurve eine Spitze. Es sei noch bemerkt, daß die Integralkurve keine Strecken enthält, die der y-Achse parallel sind, weil für $\frac{dY}{dx} = \infty$ auch $y = \infty$ sein würde.[1])

1) D'Ocagne gibt eine einfache Konstruktion für den Krümmungsradius r der Integralkurve an. Es seien A und B die derselben Abszisse entsprechenden Punkte der Differential- und Integralkurve,

55. Instrument von Abdank-Abakanowicz. Zuerst hat das Prinzip eines Integraphen Coriolis angegeben (1836), später haben sich Zmurko (1861), J. Thomson und Cayley (1876 und 1877) damit beschäftigt, 1878 haben Abdank-Abakanowicz und ziemlich gleichzeitig Boys Integraphen konstruiert. Wir gehen nur auf die neuere Form ein, welche Coradi dem Instrument von Abdank-Abakanowicz gegeben hat, dessen Konstruktion der Erfinder nicht mehr erlebt hat.

Das Instrument besteht aus einem rechteckigen Rahmen, dessen lange Seiten L und L' (Fig. 84) bei dem größeren Modell etwa 52, bei dem kleineren 27 cm lang sind und als Schienen für zwei Wagen, den Differentialwagen W und den Integralwagen W^1

AT die Tangente der Differentialkurve und $CT = \sigma$ ihre Subtangente, φ wie früher der Winkel der Tangente BE der Integralkurve mit der x-Achse oder auch der Direktrix DA der Differentialkurve, so ist $\sigma = y\frac{dx}{dy}$ oder wegen $\frac{dY}{dx} = \operatorname{tg}\varphi = y$ auch $\sigma = \operatorname{tg}\varphi\frac{dx}{dy}$. Wenn dS das Bogenelement der Integralkurve bezeichnet, ist $r = \frac{dS}{d\varphi}$ und $\cos\varphi\, dS = dx$. Da ferner $\sec^2\varphi\, d\varphi = dy$ ist, so ergibt sich

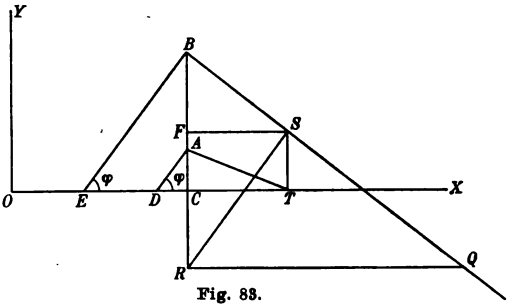


Fig. 83.

$$r = \frac{dS}{dy}\sec^2\varphi = \frac{dx}{dy}\sec^3\varphi = \frac{\sigma}{\sin\varphi\cos^2\varphi} \quad \text{oder} \quad \sigma = r\sin\varphi\cos^2\varphi.$$

Man errichte in B senkrecht zur Tangente BE die Normale der Integralkurve, welche in S die Ordinate von T schneide. In S errichte man wiederum eine Senkrechte SR auf SB, deren Schnittpunkt mit der Ordinate CB in R sei. Eine Parallele RQ zur x-Achse trifft die Normale BS im Punkte Q, dem gesuchten Krümmungsmittelpunkt. In der Tat ist, wenn wir noch die Parallele $FS = \sigma$ ziehen,

$$BF = \sigma\operatorname{ctg}\varphi, \quad FR = \sigma\operatorname{tg}\varphi,$$

also

$$BR = \sigma(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi)$$

und

$$BQ = \frac{BR}{\cos\varphi} = \frac{\sigma}{\sin\varphi\cos^2\varphi}.$$

dienen. Der Rahmen selbst ruht auf zwei an seinen beiden schmalen Enden angebrachten Rollen r, während als dritter Stützpunkt ein mit dem Differentialwagen verbundener Fahrstift t bzw. eine seitlich neben ihm angebrachte Stütze s dient. Das Instrument hat also insoweit eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Coradischen Rollplanimeter (vgl. Fig. 50 u. 53). Die Bewegung auf den Rollen findet senkrecht zur Schienenrichtung in gerader Linie statt, die wir als Abszissenrichtung wählen. Jeder der beiden auf den Schienen laufenden Wagen wird auf zwei hintereinander in einer Nut rollenden Rädchen bewegt. Während der Differentialwagen, wie erwähnt, an einem in der Länge innerhalb gewisser Grenzen verstellbaren, senkrecht zur Schiene gerichteten Arme B den Fahrstift trägt, ist mit dem Integralwagen ein Zeichenstift k verbunden. Der Arm A desselben ist unter den Schienen nach vorn durchgeführt, so daß dieser Stift, ebenso wie der andere von dem Beobachter im Auge behalten wird. Auch dieser Arm hat die Richtung der x-Achse. Mit dem Integralarm ist nun in einem um eine senkrechte Achse drehbaren Rahmen C die scharfkantige Rolle i verbunden, welche auf der Zeichenebene rollend die Integralkurve beschreibt. Damit dieses Rad in jedem Augenblick die Richtung der Tangente der Integralkurve einnimmt, ist folgende Einrichtung getroffen. Um eine in der Mitte des Instruments befindliche feste Achse ist eine Schiene D drehbar, und zwar so, daß sie sich in einem Lager g, das mit dieser Achse verbunden ist, frei hin- und herschieben läßt. Ihr eines Ende ist an einem Punkte M des Differentialwagens drehbar befestigt, von dem wir zunächst annehmen wollen, daß er auf der Differentialkurve geführt wird. (Er entspricht also dem Punkte A in Figur 82, während der Drehpunkt der Schiene in der Mitte des Instruments den Punkt D darstellt, die Abszissendifferenz beider Punkte ist konstant und stellt die als Einheit gewählte Strecke CD dar.) Auf der Direktrixschiene D läuft nun ein dritter Wagen W^2 und dieser ist mit dem Rahmen, der die Achse der Rolle i hält, durch ein Gelenkparallelogramm P verbunden. Hierdurch wird die Ebene von i stets der Schiene D und der Bewegungsrichtung des Wagens W^2 parallel gehalten.

Dadurch, daß nicht der Drehungspunkt M der Direktrixschiene am Wagen W, sondern der senkrecht zur Bewegungsrichtung von W stehende Differentialarm den Fahrstift trägt, tritt eine Verschiebung der y-Achse der Differentialkurve ein. Ebenso zeichnet nicht die Rolle i, sondern der um eine konstante Länge in der

Richtung der x-Achse abstehende Zeichenstift k die Integralkurve, wodurch auch diese in der Abszissenrichtung verschoben erscheint. Eine solche Verschiebung wird ferner dadurch notwendig, daß die beiden Stifte t und k sich nicht gegenseitig stören dürfen. Bringt man nämlich den Differentialwagen W in die Mitte des Instruments, so daß die Direktrixschiene parallel der x-Achse steht, so rollt der Wagen W^2 in der Richtung der x-Achse und auch die Rolle i muß in dieser Richtung rollen. Um dies aber zu ermöglichen, wird der Wagen W^1, mit dem die Rolle i fest verbunden ist, gezwungen, ebenfalls in die Mitte des Instruments zu rollen. Folglich befinden sich nicht nur i und W^2 in derselben Vertikalebene (die senkrecht zur Längserstreckung des Instruments steht), sondern auch die beiden Stifte. Der Differentialstift t ist deshalb an einem etwas höher liegenden Arm angebracht und dieser Arm kann durch die Hülse H etwas verlängert werden, damit die beiden Stifte sich nebeneinander befinden (um eine konstante Abszissendifferenz von einander liegend). In dieser Grundstellung beschreiben bei Bewegung des ganzen Instruments die beiden Stifte eine der x-Achse parallele Gerade. Man untersucht auf diese Weise vor Beginn der Arbeit mit dem Instrument, ob die Schienen die vorschriftsmäßige Lage parallel zur y-Achse haben.

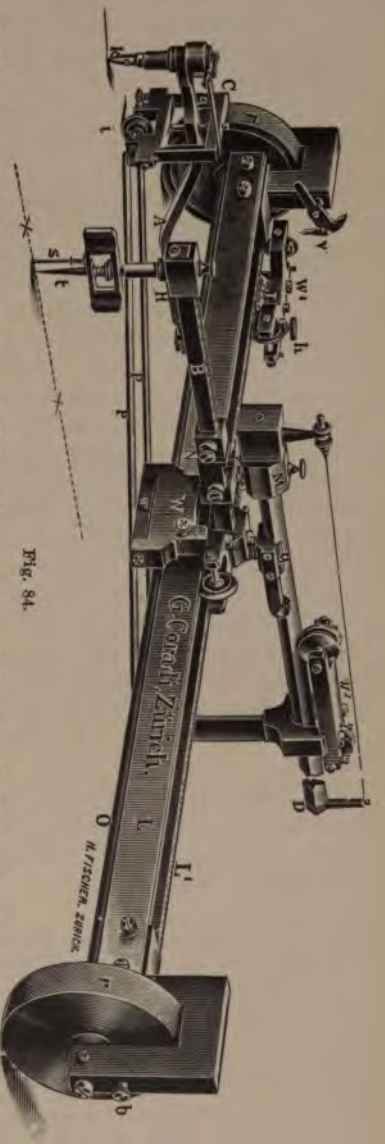


Fig. 84.

Will man eine vorgelegte Kurve integrieren, so löst man den Differentialwagen W, den man an jeder Stelle festklemmen kann, und bringt den Fahrstift t auf den Anfangspunkt der Kurve. Den Integralwagen W^1 schiebt man dagegen möglichst weit zur Seite, wo die Teilung ihren Anfangspunkt hat, an der man die Ordinaten Y ablesen kann. Wie weit diese Verschiebung möglich ist, hängt von der Längeneinheit ab, die sich in gewissen Grenzen verändern läßt[1]), beim großen Apparat zwischen 10 und 20 cm, beim kleinen zwischen 4 und 12,5 cm. Jede Bewegung des Fahrstifts t in der Richtung der x-Achse wird durch das Rollen des ganzen Instrumentes auf den Rädern r, jede Bewegung in der y-Achsenrichtung durch Verschiebung des Differentialwagens W auf seiner Schiene L bewirkt. Bei letzterer Bewegung wird die Direktrixschiene um den festen Drehpunkt (unterhalb g) in der Mitte des Instruments gedreht. Die Einstellung des Stiftes t bzw. des Wagens W in der y-Richtung bestimmt also die Richtung der Direktrixschiene D. Der Wagen W^2 bleibt dabei durch seine Verbindung mit dem Rahmen C der Integrierrolle nahezu in unveränderter Entfernung von diesem und rollt infolgedessen auf der Schiene D bei ihrer Drehung. Das von W^2 geführte Gelenkparallelogramm P dreht nun den Rahmen C so, daß die Ebene der Rolle i parallel der Schiene D liegt. Wird diese Rolle durch Bewegung des Instrumentes in der Abszissenrichtung in Drehung versetzt, so kann sich ihre Drehungsebene nicht ändern. Dadurch entsteht eine seitliche Komponente, welche die Rolle i und damit den Stift k durch Bewegung des Wagens W' längs L' in der Ordinatenrichtung verschiebt.

Die Ausdehnung der gegebenen Kurve kann, wie man sieht, in der x-Richtung beliebig groß sein, in der y-Richtung ist sie durch die Abmessungen des Instruments (auf etwa 52 cm beim großen Modell) beschränkt.[2])

---

1) Der Differentialarm B trägt eine Teilung. Durch die Schraube N läßt sich der vordere Drehpunkt der Direktrixschiene D auf dem Differentialarm verstellen, wodurch die Einheitsstrecke geändert werden kann.

2) Die Anwendungen des Instruments sind sehr zahlreich. Wir geben nur einige Beispiele:

a) Auflösung numerischer Gleichungen, z. B.:

$$x^4 - 2{,}50\,x^3 + 1{,}76\,x^2 - 0{,}14\,x - 0{,}12 = 0.$$

Wir setzen

56. Integrator von Pascal. Der wesentliche Punkt, durch den sich der von Ernesto Pascal 1909 konstruierte Integratore meccanico von dem vorhergehenden unterscheidet, liegt in dem Wegfall der festen Drehachse der Direktrixschiene. Im übri-

$$y = x^4 - 2{,}50\,x^3 + 1{,}76\,x^2 - 0{,}14\,x - 0{,}12 = y_0$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 7{,}50\,x^2 + 3{,}52\,x - 0{,}14 = y_1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12\,x^2 - 15\,x + 3{,}52 = y_2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 24\,x - 15 = y_3$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 24 = y_4.$$

Wir nehmen an, daß die Instrumentalkonstante, d. h. die Zahl, mit der die Ordinate der Integralkurve multipliziert werden muß, um die Fläche der Differentialkurve zwischen der x-Achse und der entsprechenden Ordinate zu erhalten, der Einheit gleich sei. Man nimmt zunächst als Differentialkurve die Gerade $y_4 = 24$, dann zeichnet der Integralstift $y_3 = 24\,x + C$. Dann stellt man den Differentialwagen so, daß für $x = 0$ $y = -15$ ist und durchläuft die Gerade $y_3 = 24x - 15$. Man erhält die Integralkurve y_2. Indem man den Differentialwagen so stellt, daß für $x = 0$ $y = +3{,}52$ ist, integriert man die erhaltene Kurve y_2 und so fort, bis man schließlich y_0 erhält. Die Schnittpunkte ($y = 0$) der zuletzt erhaltenen Kurve mit der x-Achse liefern die Wurzeln der vorgelegten Gleichung:

$$x_1 = -0{,}2, \quad x_2 = +0{,}5, \quad x_3 = +1{,}0, \quad x_4 = +1{,}2.$$

b) Differentiation von Differentialgleichungen $\frac{d^n y}{dx^n} = f^n(x)$, wenn die Gleichung durch eine Kurve gegeben ist. Man erhält durch den Apparat die n auf einander folgenden Integralkurven.

c) Bestimmung der Momente einer Fläche in bezug auf eine (der y-Achse parallele) Achse.

Ist $\int_0^a y\,dx$ die gegebene Fläche, so ist $Y_1 = \int_0^x y\,dx$ die Fläche der vorgelegten Kurve bis zur Ordinate in x,

$$Y_2 = \int_0^a Y_1\,dx = \int_0^a \int_0^x y\,dx \cdot dx = \int_0^a xy\,dx$$

das statische Moment der Fläche in bezug auf eine mit der Endordinate ($x = a$) zusammenfallende Momentenachse. Ferner ist

gen ist auch hier ein paralleles Schienenpaar auf einem Rahmen vorhanden, der senkrecht zur Schienenrichtung, die wir der y-Achse parallel annehmen, auf zwei Rollen läuft. Auf der einen Schiene läuft der Differential-, auf der anderen der Integralwagen. Die Direktrixschiene verbindet hier einfach die beiden Wagen und zwar ist sie um eine Vertikalachse des Differentialwagens so drehbar, daß sie sich in einem mit dieser Achse sich drehenden Lager in ihrer Längsrichtung verschiebt. Sie trägt am hinterer Ende (Fig. 85) den Rahmen für die Achse der Integrierrolle, deren Ebene der Direktrix par-

Fig. 85.

allel gehalten wird. Der Abstand der Schienen oder genauer die Projektion der Entfernung vom Drehpunkt der Direktrix bis zum Berührungspunkt der Integrierrolle mit der Papierebene auf die x-Achse ist die Längeneinheit oder Basis des Apparates. Mit den

$$Y_3 = \int_0^a Y_2\,dx = \int_0^a y\,dx \int_0^x x\,dx = \int_0^a \frac{x^2}{2}\,y\,dx.$$

Also liefert die Ordinate Y_3 der dritten Integralkurve das Trägheitsmoment in bezug auf dieselbe Achse. Auf einfache Weise läßt sich auch die Lage des Schwerpunktes der Fläche bestimmen.

d) Wahrscheinlichkeitsrechnung. Trägt man die Fehler ε einer Beobachtungsreihe als Abszissen auf, die relative Häufigkeit (Anzahl dividiert durch Gesamtzahl der Fehler) als Ordinaten und bezeichnet diese mit $y = \varphi(\varepsilon)$, so wird die Wahrscheinlichkeit des Fehlers durch das Integral $W = \int \varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$ dargestellt. Wenn man die Kurve $\varphi(\varepsilon)$ mit dem Fahrstift durchläuft, so geben die Ordinaten der Integralkurve W.

Bezüglich anderer Anwendungen sei auf Br. Abdank-Abakanowicz Les Intégraphes, la courbe intégrale et ses applications, Paris 1886 verwiesen.

beiden Wagen sind der Führungs- und Zeichenstift verbunden, die an Armen angebracht sind, die senkrecht zur Schienen (y-) Richtung stehen, also eine konstante Verschiebung der Kurven in der Richtung der Abszissen verursachen, von der wir bei der Theorie der Einfachheit wegen absehen können. Bei dem neuesten Modell läßt sich die Größe der Basis durch Entfernung der Schienen voneinander verändern. Die beiden Stifte liegen auf verschiedenen Seiten der Schienen, weshalb das Instrument beim Gebrauch mit Vorteil so aufgestellt wird, daß die Schienenrichtung nach dem Beobachter zeigt, also das Instrument nach rechts oder links rollt. Die wesentliche Vereinfachung gegenüber dem Integraphen von Abdank-Abakanowicz liegt in dem Wegfall des dritten Wagens.

Um die Wirkungsweise des Instruments zu erkennen, halten wir den Integralwagen in einer beliebigen Stellung fest und lassen den Differentialwagen laufen. Dann ändert die Direktrixschiene fortgesetzt ihre Richtung und verschiebt sich dabei in ihrem Lager auf dem Differentialwagen. Infolge dessen dreht sich die Integrierrolle auf dem Berührungspunkt mit der Zeichenebene ruhend, ohne zu rollen. Läßt man umgekehrt den Integrierwagen frei und hält man den Differentialwagen fest, bewegt dagegen das ganze Instrument in der Richtung (der x-Achse) senkrecht zu den Schienen, so wird die Integrierrolle in ihrer Ebene sich um ihre Achse drehen. Wenn der Winkel der Rollenebene gegen die x-Achse φ ist, so wird bei einer Bewegung dx des Instruments von der Rolle der Weg $\cos\varphi\, dx$ abgewickelt. Da die Rollenebene ihre Richtung beibehält, so findet wegen der Komponente $\sin\varphi\, dx$ eine Bewegung des Integralwagens auf seiner Schiene, in der y-Richtung, statt: $dY = dx \sec\varphi \sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi\, dx$, mithin ist $\frac{dY}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$. Da nun die Rollenebene ihre Richtung festhält, also φ konstant bleibt, so wird $Y = x \operatorname{tg}\varphi + C = bx + C$, d. h. der Integrierstift beschreibt eine gegen die Abszissenachse um den Winkel φ geneigte Gerade. Wird dagegen auch der Differentialwagen losgelassen, so ändert sich fortgesetzt die Richtung der Direktrixschiene, also auch diejenige der Rollenebene, und der Integrierstift beschreibt eine stetig gekrümmte Kurve.

Wir denken uns die gegebene Differentialkurve und die Integralkurve auf dieselbe x-Achse bezogen. Sind x, y die Koordinaten der gegebenen Kurve, X, Y der Integralkurve, so ist $X - x = b$ die konstanten Basis des Apparates gleich, die wir als Einheit wähle

Wenn ferner φ der Winkel der Direktrix mit der x-Achse, also auch der Tangente der Integralkurve ist, so bestehen die Gleichungen $\operatorname{tg}\varphi = y - Y$ und $\frac{dY}{dx} = y - Y$. Bezeichnen wir noch $\frac{dY}{dx} = Y'$, $y = F(x)$, so erhalten wir die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$Y' + Y = F(x), \tag{1}$$

die daher durch den Apparat integriert wird.

Sind die Ordinaten beider Kurven gleich, $y = Y$, so hat die Integralkurve ein Maximum oder Minimum, weil $\frac{dY}{dx} = 0$ ist. Wenn die Tangenten entsprechender Punkte beider Kurven zusammenfallen, also $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx}$ ist, so wird $\frac{d^2Y}{dx^2} = Y'' = 0$, und die Integralkurve hat eine Wendetangente parallel zur x-Achse. Wenn die Ordinate der Differentialkurve diskontinuierlich ist, so ist die Tangente der Integralkurve diskontinuierlich. Wenn nämlich der Fahrstift einen Kurvenbogen durchläuft und man läßt durch einen Zug den Differentialwagen auf seiner Schiene laufen, ohne den Apparat zu verrücken, und verfolgt dann mit dem Fahrstift einen andern Kurvenbogen, dessen Anfangspunkt also eine andre Ordinate, aber dieselbe Abszisse wie der Endpunkt der erst beschriebenen Kurve hat, so wechselt die Integralkurve plötzlich ihre Richtung. Sie macht, von der Unterbrechung an, einen Winkel mit der bis dahin beschriebenen Kurve, also hat die Integralkurve einen Rückkehrpunkt. Wenn dagegen die Tangente der Differentialkurve diskontinuierlich ist, aber ihre Ordinate kontinuierlich, so bleibt die Tangente der Integralkurve kontinuierlich. Wenn also der Fahrstift einen Kurvenbogen bis zu einem gewissen Punkte beschreibt, und man läßt nun plötzlich den Apparat in entgegengesetzter Richtung rollen, so entsteht bei der Integralkurve eine Spitze, da die beiden Teile der Kurve in dem betrachteten Punkte eine gemeinsame Tangente haben.

Das allgemeine Integral der Gleichung (1) ist

$$Y = e^{-x}\Big[\int F(x)e^x dx + C\Big] = Y_0 + e^{-x}\int_{x_0}^{x} F(x)e^x dx, \tag{2}$$

wenn $Y = Y_0$ für $x = x_0$ ist.

Befährt man eine geschlossene Kurve mehrmals, z. B. einen Kreis mit der Gleichung $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, so hat die Integralkurve in den $x=a\pm r$ entsprechenden Punkten Spitzen (vgl. S. 156) und bei mehrmaligem Durchfahren werden sowohl die Spitzen, welche $x=a+r$ entsprechen, als auch diejenigen, welche $x=a-r$ entsprechen, gleiche Ordinatendifferenzen haben. Die Ordinate vergrößert sich nach jedem vollen Umlauf um

$$e^{-x}\int_{x_0}^{x_0} F(x)e^x dx,$$

wo sich die Grenzen auf denselben Punkt vor und nach dem Umlauf beziehen. Der Faktor e^{-x} ist um so kleiner, je größer die Abszisse ist, also die konstanten Ordinatendifferenzen sind für die Abszisse $x=a-r$ größer als für die Abszisse $x=a+r$.

Setzt man in (2) $F(x)=a$ einer Konstanten gleich, so folgt[1])

$$Y=a+Ce^{-x}. \tag{3}$$

Man erhält also die Exponentialkurve. Sie nähert sich asymptotisch der Geraden $Y=a$. Wenn wir die x- und y-Achse so legen, daß der Punkt $x=0$ $Y_0=a\pm 1$ ein Punkt der Kurve ist, so erhalten wir in diesem Punkte

$$Y_0=a\pm 1=a+C, \quad \text{also} \quad C=\pm 1,$$

mithin als Gleichung der Kurve nach (3) $Y=a\pm e^{-x}$, oder wenn wir die x-Achse parallel um den Abstand a verschieben: $Y=\pm e^{-x}$, oder auch, wenn wir das Zeichenblatt um 180^0 drehen, so daß $+x$ in $-x$ übergeht, $Y=\pm e^x$.

Verschiebt man die y-Achse parallel um $x=-m$, so wird $Y=e^{x+m}=Me^x$, und man erhält die logarithmische Kurve.

Hat man die Integralkurve $Y=e^x$ erhalten und durchläuft man diese Kurve als Differentialkurve mit dem Fahrstift, so erhält man eine neue Integralkurve

$$Z=e^{-x}\left[\int e^{2x}dx+C\right]=\tfrac{1}{2}e^x+Ce^{-x}. \tag{4}$$

Das Vorzeichen von C hängt von der Anfangsstellung des Integralwagens ab. Beginnen wir die Durchfahrung von $F_1(x)=e^x$

1) $Y=ae^{-x}\int e^x dx=ae^{-x}(e^x+c)$, $ac=C$.

im Punkte $x = 0$, $y = 1$, so wird, je nachdem die Anfangsstellung des Integralwagens $Z_0 > \frac{1}{2}$, $Z_0 = \frac{1}{2}$, $Z_0 < \frac{1}{2}$ gewählt wird, C positiv, null oder negativ sein, da für $x = 0$ $Z_0 = \frac{1}{2} + C$ oder $C = Z_0 - \frac{1}{2}$ ist.

Ist C positiv, so stellt (4) eine Kettenlinie dar. Wenn nämlich der Anfangspunkt auf der x-Achse verschoben wird, so daß $x = x' + m$ ist, so erhält man mit $m = \frac{1}{2}\log 2C$ die Gleichung in der Form $Z = \frac{1}{2}e^m(e^{x'} + e^{-x'})$, also die Kettenlinie mit dem Parameter $e^m = \sqrt{2C}$. Ist $C = \frac{1}{2}(Z_0 = 1)$, so erhält man die Kurve $Z = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos ix = \mathfrak{Cof}\, x$. Ist $C = 0$ $(Z_0 = \frac{1}{2})$, so wird $Z = \frac{1}{2}e^x$, also ist die Integralkurve wiederum eine Exponentialkurve. Ist endlich C negativ, so erhält man

$Z = \frac{1}{2}e^m(e^x - e^{-x})$ und für $m = 0$ $Z = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \mathfrak{Sin}\, x$.

Auch mit diesem Apparat lassen sich algebraische Gleichungen lösen. Setzt man in (2)

$$F(x) = e^{-x}, \quad \text{so ist} \quad Y_1 = e^{-x}(x + C).$$

Integriert man diese Kurve nochmals, so liefert der Apparat[1])

$$Y_2 = e^{-x}(\tfrac{1}{2}x^2 + Cx + C')$$

und so fort.[2])

Wird der Schienenabstand verstellbar eingerichtet, so daß man statt der Basis 1 die Basis $\frac{1}{a}$ erhält, so ist

---

1) $Y_2 = e^{-x}\left[\int F(x)e^x dx + C'\right] = e^{-x}\left[\int (x + C)dx + C'\right]$, wenn

$$F(x) = e^{-x}(x + C)$$

eingesetzt wird.

2) Beispiel:

$$\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}Mx^2 + Nx + P = 0$$
$$\tfrac{1}{2}x^2 + Mx + N = 0$$
$$x + M = 0$$

1. Differentialkurve: $y = e^{-x}$. Einstellung des Differentialwagens: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

Integralkurve: $Y_1 = e^{-x}(x + C)$. Einstellung des Integralwagens: $x_0 = 0$, $Y_0 = M$, also

2. $Y_1 = e^{-x}(x + M)$ $\quad x_0 = 0$, $y_0 = M$

$$Y_2 = e^{-x}\left(\frac{x^2}{2} + Mx\right) + e^{-x}C \quad x_0 = 0, \; Y_0 = N$$

$$\operatorname{tg}\varphi = a(y - Y) \quad \text{und} \quad \frac{dY}{dx} = ay - aY,$$

also mit

$$\frac{dY}{dx} = Y', \qquad Y' + aY = ay.$$

Integriert man die Kurve Y von neuem und wählt die Basis $\frac{1}{b}$, so erhält man

$$Z' + bZ = bY = by - \frac{b}{a}Y'$$

oder

$$aZ' + abZ - aby + bY' = 0.$$

Nun erhält man durch Differentiation $Z'' + bZ' - bY' = 0$, oder wenn man den Wert für bY' einsetzt,

$$Z'' + (a + b)Z' + abZ = aby,$$

wo $y = f(x)$ die ursprünglich gegebene Kurve ist. Man kann in dieser Weise fortfahren und erhält Differentialgleichungen von beliebiger Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Der Apparat zeichnet die Kurve der Funktion Z, welche der Differentialgleichung genügt.

Sollen die Koeffizienten nicht Konstante, sondern Funktionen von x sein, so muß die Basis eine Funktion von x sein, also durch einen Mechanismus der Schienenabstand stetig geändert werden. Dieser Mechanismus müßte mit einem Stifte verbunden sein, mit dem man eine gegebene Kurve $\Phi(x)$ umfährt, aber die gleichzeitige Führung von zwei Stiften auf zwei Kurven hätte Schwierigkeiten, und es müßte ein zweiter Beobachter tätig sein.[1])

---

3. $Y_2 = e^{-x}\left(\frac{x^2}{2} + Mx + N\right)$ $\quad x_0 = 0,\ y_0 = N$

$Y_3 = e^{-x}\left(\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}Mx^2 + Nx + C\right)$ $\quad x_0 = 0,\ Y_0 = P$

$Y_3 = e^{-x}\left(\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}Mx^2 + Nx + P\right)$.

Die Schnittpunkte der Kurve Y_3 mit der x-Achse geben die reellen Wurzeln der vorgelegten Gleichung.

1) Wenn a eine Funktion von x ist, stellt die Gleichung $Y' + aY = ay$ die Form dar, auf die eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung stets gebracht werden kann.

Wesentlich einfacher ist eine andere Abänderung (Fig. 86), welche der Ebene der Rolle eine beliebige konstante Neigung α gegen

Fig. 86.

die Direktrixschiene gibt. Sei α der Winkel, so daß der Winkel der Rollenebene gegen die x-Achse $\varphi + \alpha$ wird, so erhält man

$$\frac{dY}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\alpha}, \quad \text{oder mit} \quad \operatorname{tg}\alpha = m$$

$$y - Y = \operatorname{tg}\varphi = \frac{Y' - m}{1 + m\,Y'},$$

oder

$$Y = \frac{m - Y'}{1 + m\,Y'} + y,$$

oder

$$Y'[1 + m(Y - y)] + Y - y - m = 0.$$

Dies ist also eine Differentialgleichung, die der umgeänderte Apparat integriert.

Wird im Besonderen die Rolle senkrecht zur Richtung der Direktrix gestellt, also der Winkel $\alpha = 90^0$ gemacht, so integriert

das Instrument die Differentialgleichung

$$Y = \frac{1}{Y'} + y = \frac{1}{Y'} + f(x).$$

Diese Vorrichtung, welche die Rollenebene um eine vertikale Achse beliebig zu drehen gestattet, kann auch bei dem Instrumente von Abdank-Abakanowicz angebracht werden. Der Drehungswinkel α wird dabei an einem horizontalen, geteilten Kreise eingestellt. Wir werden die Instrumente von Abdank und Pascal kurz durch A und P bezeichnen. Da der Unterschied in der Theorie darin liegt, daß bei P: $y - Y = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$, bei A: $y = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$ ist, wenn a die (gewöhnlich = 1 gesetzte) Einheitsstrecke oder Basis des betreffenden Instrumentes bedeutet, so erhalten wir bei A einfacher mit $\mathrm{tg}\,\alpha = m$

$$Y' = \frac{am + f(x)}{a - mf(x)}.$$

Für $\alpha = -90^0$ und $a = 1$ wird ferner bei A

$$Y' = \frac{1}{f(x)} \text{ oder } Y = \int \frac{dx}{f(x)} + C.$$

Wählt man im Besondern $f(x) = x$ d. h. als Differentialkurve eine um 45^0 gegen die Abszissenachse geneigte Gerade, so zeichnet der Integrierstift für gegebene Grenzen die Kurve

$$Y = \log x.$$

Läßt man nun die Stellung der Rolle ($\alpha = -90^0$) unverändert und verwendet man die soeben erhaltene logarithmische Kurve als Differentialkurve, so beschreibt der Integrierstift, indem man $f(x) = \log x$ einzusetzen hat, die Funktion

$$Y = \int \frac{dx}{\log x},$$

die zuerst von Euler[1]) betrachtet und von Soldner[2]) Integrallogarithmus benannt worden ist. Gauß[3]) hat darauf aufmerk-

1) Institutiones calculi integralis I, Kap. IV.

2) Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendente, München 1809. Vgl. L. Kronecker, Vorlesungen über die Theorie der einfachen und vielfachen Integrale, herausg. v. E. Netto, Leipzig (Teubner) 1894, 199—214.

3) Werke II, 444. (Brief an Encke.)

sam gemacht, daß dieses Integral die Anzahl aller Primzahlen unter einer gegebenen Grenze nahezu darstellt. Das Instrument gibt daher eine zahlentheoretische Anwendung, indem die Ordinate Y die Anzahl der Primzahlen unter der durch die zugehörige Abszisse x dargestellten Zahl mißt.

Noch zwei andere Abänderungen des Integraphen rühren von Pascal her.

Die erste besteht darin, daß an Stelle der einen geradlinigen Schiene, nämlich derjenigen, auf welcher der Integralwagen läuft, eine gekrümmte Schiene eingesetzt wird, welche die Gestalt einer vorgeschriebenen Kurve besitzt.

Denken wir uns durch den Drehpunkt der Direktrix am Differentialwagen eine Parallele zur y-Achse gelegt, die also nahe mit der Differentialschiene zusammenfällt, und den Anfangspunkt des mit dem Instrumente beweglichen Koordinatensystems auf der festen x-Achse, so kann man sich die Gleichung der Schienenkurve in der Form $\xi = \Phi(Y)$ gegeben denken. Dies ist zugleich die Kurve, welche der Integrierstift bei ruhendem Instrument beschreibt, wenn sein Wagen auf der gekrümmten Schiene läuft, nur um ein konstantes Stück in der Abszissenrichtung verschoben. Es ist nun $X = \xi + x$ und daher $y = f(X - \xi) = f(X - \Phi(Y))$. Wird noch die Rollenebene drehbar angenommen, so erhalten wir bei Instrument A mit $m = \operatorname{tg}\alpha$

$$Y' = \frac{ma + f(X - \Phi(Y))}{a - mf(X - \Phi(Y))}.$$

Beim Instrument P ist a der Abszissenunterschied des Integrierstiftes und Drehpunktes der Direktrix, mithin tritt bei dem abgeänderten Instrument ξ an Stelle von a und aus $Y' = \operatorname{tg}(\varphi + \alpha)$ und $y - Y = \xi \operatorname{tg}\varphi$ folgt

$$Y' = \frac{m\Phi(Y) + f(X - \Phi(Y)) - Y}{\Phi(Y) - m[f(X - \Phi(Y)) - Y]}.$$

Die zweite Abänderung, die ohne Weiteres nur beim Instrument P angebracht werden kann, läßt die geradlinigen Schienen unverändert, ersetzt dagegen die Direktrix durch eine Kurve von gegebener Form. Die Integrierrolle wird dabei so geführt, daß ihre Ebene stets die Tangente dieser Kurve enthält.[1]) Der ver-

1) In einer während des Druckes erschienenen Abhandlung: Sul mio integrafo a riga curvilinea, Napoli 1912, gibt Pascal eine ver-

änderliche Winkel, den dann die Rollenebene mit der geraden Linie bildet, welche die Direktrix in ihrer ursprünglichen Gestalt darstellt, sei α und $\varphi + \alpha$ der Winkel mit der x-Achse. Der Winkel α hängt von der Stellung der beiden Wagen auf ihren Schienen bei ruhendem Instrument, also von $y - Y$ ab und wir können daher $\operatorname{tg}\alpha = \psi(y - Y)$ setzen. Wegen $Y' = \operatorname{tg}(\varphi + \alpha)$, $y - Y = a\operatorname{tg}\varphi$, $y = f(x)$ wird daher

$$Y' = \frac{f(x) - Y + a\psi(f(x) - Y)}{a - [f(x) - Y]\psi(f(x) - Y)} = \Psi(f(x) - Y).$$

Auch die gleichzeitige Anbringung beider Variationen hat Pascal untersucht.

Polarintegraph. Wir wenden uns noch einer andern Form eines Integraphen zu, den Pascal konstruiert hat. Ein Kreisquadrant ruht 1.) drehbar in seinem Mittelpunkte fest auf der Zeichenebene, 2.) auf einer am Ende des einen begrenzenden Radius angebrachten Walze und 3.) auf der an einem beweglichen Radius verschiebbaren Integrierrolle, also auf drei Punkten auf und kann auf der Walze rollend um den Mittelpunkt rotieren. Der fest mit dem Kreisbogen verbundene, zuerst genannte Radius, an dem die Walze sitzt, dient als Schiene für einen Differentialwagen, während der Integralwagen auf dem gegen diesen Radius um einen (am Kreise ablesbaren) Winkel verstellbaren andern Schienenradius sich bewegt. Beide Wagen sind durch eine geradlinige Direktrixstange verbunden, die sich um Zapfen an beiden Wagen drehen und außerdem in ihrer Längsrichtung verschieben kann. Zu letzterem Zwecke ist sie über ein Lager geführt, das der Zapfen des Differentialwagens trägt. Wir sehen für die Theorie des Instrumentes davon ab, daß der Zeichenstift des Integralwagens aus praktischen Gründen seitlich, aber in derselben Entfernung vom Mittelpunkt, den wir auch als Pol bezeichnen wollen, angebracht ist. Wir nehmen vielmehr an, daß der Berührungspunkt der am Integralwagen befindlichen Rolle, deren Ebene mit der Richtung der Direktrix in jedem Augenblicke zusammenfällt, die Integralkurve beschreibt.

In der Anfangsstellung des Instruments möge der die Differentialschiene bildende Radius mit einer in der Zeichenebene gewählten

besserte Konstruktion an, bei der die gekrümmte Direktrix-Schiene sich um einen Zapfen des Integralwagens dreht während der Zapfen des Differentialwagens sich längs der Schienenkurve verschiebt. Die Rollenebene ist dabei fest mit der Schiene verbunden.

Anfangsrichtung den Winkel ϑ bilden. Ist ϱ die der Stellung des Wagens entsprechende Entfernung des Differentialstiftes vom Pole, so sei $\varrho = f(\vartheta)$ die Gleichung der gegebenen Kurve. Der am Kreisbogen abgelesene Winkel der beiden Schienen sei ω, r der Leitstrahl des Berührungspunktes der Integrierrolle, $90^0 - \varphi$ der Winkel ihrer Ebene oder der Verlängerung der Direktrix mit dem Radius r, so ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dr}{r\,d(\vartheta+\omega)} = \frac{dr}{r\,d\vartheta},$$

da ω während der Ausführung der Integration ungeändert bleibt. Die Länge der Direktrix (zwischen ihren Drehpunkten auf beiden Wagen) ist

$$\delta = \sqrt{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r\cos\omega}.$$

Aus dem Dreieck mit den Seiten ϱ, r und δ folgt

$$\cos\varphi = \frac{\varrho\sin\omega}{\sqrt{r^2+\varrho^2-2r\varrho\cos\omega}} \text{ und } \operatorname{tg}\varphi = \frac{r-\varrho\cos\omega}{\varrho\sin\omega},$$

mithin

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r^2}{\sin\omega f(\vartheta)} - r\operatorname{ctg}\omega$$

oder

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\vartheta} - \frac{1}{r}\operatorname{ctg}\omega = -\frac{1}{\sin\omega\cdot f(\vartheta)}.$$

In diese lineare Form kann eine Bernoullische Gleichung $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ gebracht werden, wenn P konstant ist.

57. Integratoren für Differentialgleichungen. Die Integraphen von Pascal können zwar Quadraturen ausführen, sind aber in erster Linie für die Integration von Differentialgleichungen bestimmt. Zu letzterem Zwecke sind noch verschiedene Instrumente konstruiert worden: von Lord Kelvin 1876, Torrès 1895, Petrovitch 1897[1]). Wir fügen noch eine kurze Beschreibung von zwei Apparaten von L. Jacob, Generalingenieur der französischen Schiffsartillerie, hinzu, welche zwei besondere Differentialgleichungen integrieren.[2]) Sie sind in ihrem Hauptteil einem Prytz-

1) Vgl. L. Jacob, Le calcul mécanique, wo sich die Literatur angegeben findet.

2) In einer soeben erschienenen Abhandlung: C. Ajello, Su di una importante applicazione dell' integrafo Pascal a riga curvilinea, Napoli 1912, wird gezeigt, daß auch der Pascalsche Integraph mit gekrümmter Direktrix die Riccatische und Abelsche Gleichung integriert.

schen Stangenplanimeter ähnlich, bei dem die Schneide durch ein scharfrandiges Rad ersetzt ist. (S. S. 122).

Der Fahrstift ist bei dem ersten zur Auflösung der Riccatischen Gleichung bestimmten Apparate durch den Mittelpunkt eines geteilten Kreises hindurchgeführt. Ein Durchmesser dieses horizontalen Kreises wird durch zwei miteinander verbundene Gelenkparallelogramme stets einer bestimmten gegebenen Richtung parallel gehalten, wenn der Fahrstift auf der gegebenen Kurve entlang geführt wird. Dieser ganze Mechanismus wird von kleinen Rollen getragen, damit der Kreis und die Parallelogramme mit möglichst wenig Reibung sich bewegen können. An der Stange des Apparates ist ein Nonius angebracht, der an dem Kreise gleitet und den Winkel, den die Stange in irgend einem Augenblick mit der Anfangsrichtung einschließt, abzulesen gestattet.

Wie beim Stangenplanimeter ist die Richtung der Stange jederzeit Tangente an die vom Berührungspunkte des Schneidenrades beschriebene Kurve. Es seien X, Y die Koordinaten dieses Berührungspunktes, x, y diejenigen des Fahrstiftes; ω sei der Winkel, den die Stange mit der Abszissenachse, die wir als Anfangsrichtung wählen, einschließt, ϱ die Länge der Stange, d. h. der Abstand vom Fahrstift bis zum Mittelpunkt des Schneidenrades. Es ist dann

$$\frac{dY}{dX} = \operatorname{tg}\omega, \tag{1}$$

ferner

$$X = x + \varrho\cos\omega, \quad Y = y + \varrho\sin\omega \tag{2}$$

also

$$\begin{aligned} dX &= dx + \cos\omega d\varrho - \varrho\sin\omega d\omega \\ dY &= dy + \sin\omega d\varrho + \varrho\cos\omega d\omega, \end{aligned} \tag{3}$$

woraus durch Multiplikation der ersten Gleichung mit $-\sin\omega$, der zweiten mit $+\cos\omega$ und Addition mit Rücksicht auf (1) folgt:

$$0 = -\sin\omega dX + \cos\omega dY = \varrho d\omega + \cos\omega dy - \sin\omega dx: \tag{4}$$

Wir führen eine unabhängige Variable t ein und denken uns die gegebene, vom Fahrstift beschriebene Kurve durch

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t)$$

definiert. Es ist dann

$$dx = f_1'(t)dt, \quad dy = f_2'(t)dt$$

und nach (4)

$$\varrho \frac{d\omega}{dt} + f_2'(t)\cos\omega - f_1'(t)\sin\omega = 0. \tag{5}$$

Führt man noch $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega = u$ ein, dann ist

$$du = \frac{\frac{1}{2}\,d\omega}{1+u^2},\quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{2\frac{du}{dt}}{1+u^2},\quad \cos\omega = \frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \sin\omega = \frac{2u}{1+u^2},$$

und man erhält nach (5) für die Winkelbewegung der Stange die Differentialgleichung

$$2\varrho \frac{du}{dt} + (1-u^2)f_2'(t) - 2uf_1'(t) = 0 \tag{6}$$

oder für eine bestimmte Stangenlänge $\varrho = l$ (die Stangenlänge läßt sich bei dem Apparate ändern)

$$\frac{du}{dt} = u^2\frac{f_2'(t)}{2l} + u\frac{f_1'(t)}{l} - \frac{f_2'(t)}{2l}. \tag{7}$$

Man nennt nun eine allgemeine Riccatische Gleichung eine Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{du}{dt} = Pu^2 + Qu + R \tag{8}$$

wo P, Q, R Funktionen von t sind. Im vorliegenden Falle besteht aber die einschränkende Bedingung $P + R = 0$. Soll diese Gleichung integriert werden, so hat man (vgl. (7) und (8))

$$\frac{dy}{dt} = f_2'(t) = 2lP = -2lR,\quad \frac{dx}{dt} = f_1'(t) = lQ$$

also

$$y - y_0 = 2l\int P\,dt,\quad x - x_0 = l\int Q\,dt$$

zu setzen, wo y_0 und x_0 Integrationskonstante sind oder auch die Koordinaten, die dem Werte t_0 entsprechen, bedeuten. Durch x und y ist dann die vom Fahrstift zu durchlaufende Kurve gegeben.

Das Integral bis zur Grenze $t = t_1$ erhält man dann, indem man den Winkel ω_1 am Instrument abliest, nämlich $u_1 = \operatorname{tg}\frac{\omega_1}{2}$.

Der allgemeine Fall, in dem $P + R \gtrless 0$ ist, läßt sich auf den besondern zurückführen. Setzt man $u = \lambda v$, wenn λ eine noch unbestimmte Funktion von t ist, so hat man aus (8)

(9) $$u' = \lambda v' + v\lambda' = P\lambda^2 v^2 + Q\lambda v + R$$

also

(10) $$v' = P\lambda v^2 + \left(Q - \frac{\lambda'}{\lambda}\right) v + \frac{R}{\lambda}.$$

Bestimmt man nun λ so, daß

$$P\lambda + \frac{R}{\lambda} = 0 \text{ oder } \lambda = \pm\sqrt{-\frac{R}{P}}$$

ist, so ist der allgemeine auf den speziellen Fall zurückgeführt. Jedoch erhält man nur dann eine reelle Wurzel λ, wenn R und P verschiedene Vorzeichen haben.

Wenn dies in dem in Betracht kommenden Intervall von t_0 bis t_1 nicht der Fall ist, führt man den als bekannt anzunehmenden Winkel β der Tangente in einem beliebigen Punkte der gegebenen Kurve mit der x-Achse ein. Dann bilden die Tangenten in den entsprechenden Punkten beider Kurven miteinander den Winkel $\beta - \omega = \vartheta$.

Da

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\beta \text{ und } l\,d\omega + \cos\omega\,dy - \sin\omega\,dx = 0$$

ist (s. (4)), so folgt

$$l\,d\beta - l\,d\vartheta + \cos(\beta - \vartheta)\,dy - \sin(\beta - \vartheta)\,dx = 0$$

oder auch wegen $\cos\beta\,dy - \sin\beta\,dx = 0$

$$l\,d\vartheta = l\,d\beta + \sin\beta\sin\vartheta\,dy + \cos\beta\sin\vartheta\,dx.$$

Setzt man nun

$$v = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta,\ d\vartheta = \frac{2\,dv}{1+v^2},\ \sin\vartheta = \frac{2v}{1+v^2},$$

so erhält man, wenn die Ableitungen nach t genommen werden, durch Einsetzen

$$\frac{dv}{dt} = v^2\,\frac{1}{2}\,\frac{d\beta}{dt} + v\,\frac{1}{l}\left[\sin\beta\,\frac{dy}{dt} + \cos\beta\,\frac{dx}{dt}\right] + \frac{1}{2}\,\frac{d\beta}{dt},$$

also eine Gleichung von der früheren Form (10), in der $P\lambda = \frac{R}{\lambda}$ ist und $\lambda = \sqrt{\frac{R}{P}}$ wird.

Wenn also

$$P = \frac{1}{2}\,\frac{d\beta}{dt},\ Q = \frac{1}{l}\left[\sin\beta\,\frac{dy}{dt} + \cos\beta\,\frac{dx}{dt}\right]$$

gesetzt wird, so folgt

$$\beta - \beta_0 = 2\int_{t_0}^{t_1} P\,dt,\quad x - x_0 = l\int_{t_0}^{t_1} Q\cos\beta\,dt,\quad y - y_0 = l\int_{t_0}^{t_1} Q\sin\beta\,dt.$$

Für $t = t_0$ kennt man x_0, y_0, β_0, ferner ist $\omega_0 = \beta_0 - \vartheta_0$ gegeben; für $t = t_1$ erhält man die gesuchte Lösung

$$v_1 = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta_1 = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta_1 - \omega_1).$$

Der zweite Apparat von Jacob dient zur Integration der Abelschen Gleichung

$$y' = py^3 + qy^2 + ry + s,$$

wo p, q, r, s Funktionen von x sind und, $y' = \frac{dy}{dx}$ ist. Durch die Substitution

$$y = \frac{1}{u},\quad y' = -\frac{u'}{u^2}$$

gelangt man zu der Form

$$-uu' = p + qu + ru^2 + su^3.$$

Zunächst wird $s = 0$ angenommen und wir schreiben

$$uu' = Pu^2 + Qu + R.$$

Das Instrument ist ähnlich dem vorigen konstruiert. Wir denken uns wiederum ein Stangenplanimeter, dessen Fahrstift aber im Anfangspunkt einer horizontal liegenden Kurve C angebracht ist, die als eine gekrümmte Schiene einen Bestandteil des Instrumentes darstellt. Der Fahrstift führt bei seiner Bewegung längs einer gegebenen Kurve diese Schiene mit sich. Durch eine Parallelführung ist in derselben Weise wie beim vorigen Instrument dafür gesorgt, daß diese Kurvenschiene keine drehende Bewegung erfährt, sondern eine bestimmte Tangente der Kurve C bei jeder Stellung des Fahrstiftes einer auf der Zeichenebene gegebenen Anfangsrichtung parallel bleibt. Die Verschiebungen der Gelenkparallelogramme und der Kurvenschiene erfolgen nicht durch Gleiten auf der Papierebene, sondern auf kleinen Rollen.

Auf der Stange des Instruments ist nun eine Hülse verschiebbar angebracht, die unterhalb mit vertikalen und horizontalen Rädchen in der im Querschnitt U-förmig aufgebogenen Kurvenschiene geführt wird. Oben enthält diese Hülse ein Fenster, durch das man die Entfernung ϱ des darunter befindlichen Kurvenpunktes

vom Anfangspunkt der Kurve C ablesen kann. Ebenso kann man auch an der passend geteilten Kurvenschiene den Winkel ω mit der Anfangsrichtung ablesen.

Es seien x, y die Koordinaten eines Punktes der Kurve, die der Fahrstift durchläuft, und t eine unabhängige Variable. Dann ist wie oben, wenn die Akzente die Ableitungen nach t bezeichnen,

$$\varrho \frac{d\omega}{dt} = x' \sin\omega - y' \cos\omega$$

oder mit $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega = u$:

$$2\varrho \cdot u' = u^2 y' + 2ux' - y'.$$

ϱ sehen wir als eine Funktion von ω oder von u an. Um den Apparat auf die Abelsche Gleichung anwenden zu können, müssen wir $\varrho = l \cdot u$ setzen, wo l eine zunächst noch unbestimmte Länge ist. Die Kurvenform der Schiene ist dann durch

$$\varrho = f(\omega) = l \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$$

bestimmt. Entspricht dem Werte $t = t_0$ die Entfernung $\varrho_0 = l u_0$, wo $u_0 = \operatorname{tg}\frac{\omega_0}{2}$ als gegeben anzusehen ist, so ist damit l als Grundlänge oder Basis des Instruments bestimmt.

Die Kurve, auf der der Fahrstift geleitet wird, folgt aus

$$y = y_0 + 2l\int P dt, \quad x = x_0 + l\int Q dt.$$

Für einen andern Wert $t = t_1$ liest man den Wert ϱ_1 am Instrument ab und erhält

$$u_1 = \frac{\varrho_1}{l}$$

als Integral der Differentialgleichung zwischen den Grenzen t_0 und t_1.

Die integrierte Gleichung ist aber nur ein besonderer Fall der Abelschen Gleichung, nämlich derjenige, wo $P + R = 0$ ist. Um die allgemeine Gleichung hierauf zurückzuführen, setzen wir $u = \lambda z$, erhalten

$$zz' = z^2\left[P - \frac{\lambda'}{\lambda}\right] + \frac{Q}{\lambda} z + \frac{R}{\lambda^2}$$

und bestimmen die Funktion λ von t so, daß $\lambda\lambda' - P\lambda^2 = R$ wird.

Diese Gleichung können wir auch folgendermaßen schreiben:

$$\frac{d(\lambda^2)}{dt} - 2P\lambda^2 = 2R,$$

und es folgt

$$\lambda = e^{+\int P dt} \cdot \sqrt{\gamma + 2\int R e^{\int -2P dt} \dot{dt}}.$$

Durch passende Wahl der Integrationskonstanten γ wird man es in der Regel erreichen können, daß in dem in Betracht kommenden Intervall (t_0 bis t_1) λ reell ist. Sonst muß man dem besondern Falle entsprechend eine andere Behandlung der Aufgabe versuchen.

Ist der Koeffizient s von u^3 in der letzten Form der Abelschen Gleichung nicht null, so wird der Apparat komplizierter, indem an Stelle der Parallelführung eine Führung der Kurvenschiene tritt, die durch die Koeffizienten der Gleichung vorgeschrieben ist.

Literatur.

Br. Abdank-Abakanowicz, Les Intégraphes, la courbe intégrale et ses applications. Paris 1886.

A. Adler, Fünfstellige Logarithmen. Leipzig 1909. [Sammlung Göschen].

Amsler, Momentenplanimeter Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft. Zürich, Bd. **1**, 1856.

J. Amsler-Laffon, Neuere Planimeter-Konstruktionen. Zeitschr. f. Instrumentenk. **4**, 11. 1884.

A. Amsler, Das Planimeter und seine Erfindung. Zeitschr. des Vereins Schweizer Konkordatsgeometer **5**, 117, 125. 1907.

Ch. Babbage, Passages from the life of a philosopher. London 1864.

H. P. Babbage, Babbages Analytical Engine. Monthly Notices **70**, 517. 1910.

F. W. Barfuß, Handbuch der Feld-Meßkunde. 4. Aufl. von W. Jeep. Weimar 1889.

G. v. Bezold, Wissenschaftliche Instrumente im Germanischen Museum. Bd. I. Nürnberg 1899.

G. Coradi, Der harmonische Analysator mit einer Theorie desselben von Prof. O. Henrici in London Zürich 1894.

—, Präzisionspolarplanimeter (Hohmann u. Coradi D. R. P. 12377), Zeitschr. f. Vermessungsw. **10**, 127. 1881.

—, Die Planimeter Coradi. 3. Aufl. Zürich 1905.

C. Culmann, Die graphische Statik. 2. Aufl. Bd. **1**. Zürich 1875.

E. Doležal, Planimeterstudien. Berg- und hüttenmännisches Jahrbuch der k. k. montanistischen Hochschulen zu Leoben und Přibram. **54**, 293. Wien 1906. [Enthält auch ausführliche Literaturangaben].

Doll, Untersuchung der Genauigkeit von Planimetern. Zeitschr. f. Vermessungsw. **9**, 28. 1880.

W. v. Dücker, Eine Aufgabe aus der Kinematik. Archiv f. Mathematik und Physik (3) **8**, 151. 1908.

W. Dyck, Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente. München. 1892/93.

A. Emch, Kinematische Gelenksysteme. Jahresbericht der Kantonschule Solothurn. 1906/07.

Encyclopaedia Britannica .Vol. **6** (**30** of complete work), 575, 1902.

Ad. Ernst, James Watt und die Grundlagen des modernen Dampfmaschinenbaues. Berlin 1897. (Vortrag auf der 37. Hauptversammlung des Vereins deutscher Ingenieure zu Stuttgart.)

B. K. Esmarch, Die Kunst des Stabrechnens. Leipzig 1896.

A. Favaro, Sulla elica calcolatoria di Fuller. Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti (5) **5**, 495. Venezia 1878/79. [Enthält Geschichte und Klassifikation der Rechenschieber.]

Fenner, Beitrag zur Theorie des Rollplanimeters. Zeitschr. f. Vermessungsw. **15**, 216. 1886.
S. Finsterwalder, Harmonische Analyse mittels des Polarplanimeters. Zeitschr. f. Math. u. Physik **43**, 85. 1898.
H. Fürle, Zur Theorie der Rechenschieber. Jahresbericht der 9. Realschule. Berlin 1899. Progr. Nr. 126.
A. Goering, Anleitung zum Gebrauch des Rechenstabes. 3. Aufl. Berlin 1904. (Gebr. Wichmann.)
Grabowski, Theorie des harmonischen Analysators. Sitzungsber. der k. Akad. d. Wissensch. math. naturw. Kl. Wien. **110**, 717—890, 1903.
F. Günther, Äquidistanzplanimeter. Zeitschr. f. Vermessungsw. **11**, 353. 1882.
—, Versuche über die Genauigkeit des Äquidistanzplanimeters. Zeitschrift f. Vermessungsw. **12**. 1883.
—, Meßplanimeter für schmale, langgestreckte Figuren. Zeitschr. f. Vermessungsw. **15**, 506. 1886.
J. Hamann, Über das Stangenplanimeter, insbesondere ein Stangenplanimeter mit Rolle. Zeitschr. f. Vermessungsw. **25**, 643, 1896.
—, Das Koordinatenplanimeter. Zeitschr f. Vermessungsw. **28**, 464. 1899.
—, Untersuchungen über das Harfenplanimeter von Mönkemöller. Zeitschr. f. Vermessungsw. **28**, 549. 1899 (vgl. **24**, 331. 1895).
E. Hammer, Der logarithmische Rechenstab und sein Gebrauch. 4. Aufl. Stuttgart 1908. [Eine der vollständigsten Anleitungen mit historischen Notizen.]
—, Auflösung quadratischer Gleichungen mit dem Rechenschieber. [Verfahren von Engeler.] Zeitschr. f. Vermessungsw. **19**, 495. 1900.
—, Das Stangenplanimeter von Prytz nebst einzelnen Bemerkungen zur Praxis des Polarplanimeters. Zeitschr. f. Instrumentenk. **15**, 90. 1895.
—, Referate in der Zeitschrift für Instrumentenkunde.
Hartmann, Referate in der Zeitschrift für Instrumentenkunde.
F. R. Helmert, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 2. Aufl. Leipzig u. Berlin 1907. B. G. Teubner. (S. 3 Theorie des Polarplanimeters.)
O. Henrici, On a new harmonic analyser. Philosophical Magazine. (5) **38**, 110. 1894.
Von der Heyden, Das Rechenlineal (règle à biseau modifiée par Mannheim). Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterricht, herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Jahrg. **27**, 568. Leipzig 1896.
F. W. Hill, The Hatchet Planimeter. Philosophical Magazine (5) **38**. 265. 1894.
Fr. Hohmann, Das Linear-Roll-Planimeter (Hohmann-Coradi). Erlangen.
Hüser, Das Mönkemöllersche Planimeter. Zeitschr. f. Vermessungsw. **25**, 443. 1896.
K. Hunaeus, Die geometrischen Instrumente der gesamten praktischen Geometrie. 2. Ausg. Leipzig 1882. [Planimeter von Ho-

grewe, Oldendorp, Oldenburg, Wagner, Schmidt, Horsky, Westfeld, Hermann, Decker, Keller, Fichtbauer, Sang, Amsler, Wetli, Hansen erwähnt.]

L. Jacob, Le calcul mécanique. Encyclopédie scientifique. (Direction Dr. Toulouse) Bibliothèque de mathématiques appliquées (directeur M. d'Ocagne). Paris 1911.

L. Jermann, Die Gunterskala. Hamburg 1888.

Jordan, Polarplanimeter und Rechenschieber von Dennert und Pape. Zeitschr. f. Vermessungsw. **6**, 290. 1877.

—, Referate in der Zeitschrift für Vermessungswesen.

Kelling, Dividieren auf Additionsmaschinen. Zeitschr. f. Vermessungsw. **31**, 171. 1902.

F. Kloht, Kombiniertes Planimeter. Zeitschr. f. Instrumentenk. **5**, 41. 1885.

—, Über ein neues Planimeter. Zeitschr. f. Vermessungsw. **12**, 97. 1883.

Koller, Proportionalrechenschieber von Ch. Hamann in Friedenau-Berlin. Zeitschr. f. Vermessungsw. **28**, 660. 1899.

A. Korselt, Über den Trakteriographen von Kleritj und das Stangenplanimeter. Zeitschr. f. Math. und Physik. **43**, 312. 1898.

Kummer, Genauigkeit der Flächeninhaltsberechnungen mittels der Klohtschen Hyperbeltafel. Zeitschr. f. Vermessungsw. **32**, 686. 1903.

F. W. Lanchester, The radial cursor, a new addition to the slide-rule. Philosophical Magazine (5) **41**, 52.

Lang, Das Kompensationspolarplanimeter von G. Coradi in Zürich. Zeitschr. f. Vermessungsw. **23**, 353. 1894.

F. Lorber, Über das Präzisionspolarplanimeter Hohmann-Coradi. Zeitschr. f. Instrumentenk. **2**, 327. 1882. Sitzungsber. der k. Akad. d. Wissensch. math.-naturw. Kl. Wien, 1882.

—, Über die Genauigkeit der Planimeter. Österreich. Zeitschr. f. Berg- u. Hüttenwesen. **31**. 1883

—, Über das freischwebende Präzisionsplanimeter von Hohmann-Coradi. Zeitschr. f. Vermessungsw. **13**, 1. 1884.

—, Über Coradis Kugelplanimeter. Zeitsch. f Vermessungsw. **17**, 161. 1888.

—, Ein Beitrag zur Justierung des Polarplanimeters. Zeitschr. f. Vermessungsw. **12**, 457. 1883.

H. Lossier, L'intégraphe Abdank-Abakanowicz. Zürich 1903 [Coradi]. Zeitschr. f. Instrumentenk. **24**, 213. 1904.

Luedecke, Die Rechenapparate von Julius Billeter in Zürich. Zeitschr. f. Vermessungsw. **20**, 346. 1891.

K. Lüdemann, Über logarithmische Rechenschieber. Zeitschr. f. Vermessungsw. **36**, 241. 1907. [Enthält eine historische Übersicht.]

—, Über die Genauigkeit von Flächenberechnungen mit der Quadratmillimeterglastafel. Zeitschr. f. Vermessungsw. **36**, 373. 1907.

J. E. Mayer, Das Rechnen in der Technik und seine Hilfsmittel. Leipzig 1908. [Sammlung Göschen.]

R. Mehmke, Stetige Rechenapparate und -maschinen. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften I. Heft 7.

A. A. Michelson and S. W. Stratton. A new harmonic analyser. The American Journal of science (4) **5** (**45** der ganzen Reihe). Nr. 25, 1. New Haven 1898.

C. H. Müller, Der logarithmische Rechenstab. Jahresbericht des Kaiser Friedrichs Gymnasium. Frankfurt a/M. 1899. Programm Nr. 411.

F. Müller, Die Planimeter von Gangloff und Schlesinger. Zeitschr. f. Vermessungsw. **8**, 150. 1879.

R. Nelting, Der Nautisch Astronomische und Universal-Rechenstab. Hamburg 1909.

A. Nestler, Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch. Lahr i/B. 1908.

Neuendorff, Über ein neues Koordinatenplanimeter von Ch. Hamann in Friedenau-Berlin. Zeitschr. f. Vermessungsw. **27**, 553. 1898.

E. Orlich, Aufnahme und Analyse von Wechselstrom-Kurven. Elektrotechnik in Einzeldarstellungen, herausgeg. v. Dr. Benischke, VII. Braunschweig 1906, Vieweg u. S.

—, Über Aufnahme von Wechselstromkurven durch Oszillographen und ihre Analyse. Archiv der Mathem. u. Physik (3) **12**, 237. 1907.

—, Referate in der Zeitschrift für Instrumentenkunde.

A. Ott, Das Wesen und der Gebrauch des Ott'schen Kompensationsplanimeters. Kempten (Bayern).

G. Oldenberger, Einige einfache mechanische Rechenapparate. Zeitschr. f. Instrumentenk. **5**, 163. 1885.

E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik, deutsch von A. Schepp. Leipzig 1900, B. G. Teubner. [Teil I. Kap. XXIII. Analytische Instrumente und Apparate.]

—, L'integratore meccanico per le equazioni lineari differenziali di 1° ordine e per altre equazioni differenziali. Atti della R. Accademia dei Lincei. **18**, 304. Roma 1909. Giornale de Mathematiche di Battaglini (3) **1** (Vol. 48) 1910.

—, Sopra una semplice ma notevole variante nella costruzione dell' integrafo di Abdank-Abakanowicz. Rend. della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Mathematiche di Napoli, Fasc. 5°, 6°. 1911.

—, Sopra alcuni classi di integrafi per equazioni differenziali. Rend. della R. Accademia delle Science Fisiche e Mathematiche di Napoli. Fasc. 7°, 8°, 9°. 1911.

—, Di un nuovo integrafo per quadrature ed equazioni differenziali (integrafo polare). Rend. della R. Accademia delle Science Fisiche e Mathematiche di Napoli. Fasc. 10°, 11°, 12°. 1911.

—, L' uso e le applicazioni dell' integratore meccanico per le equazioni differenziali. Giornale de Mathematiche di Battaglini. (3) **2** (Vol. 49). 1911.

Perry, Remarks on Prof. Henrici's Paper, in which he describes a simple machine which may be used to develop any arbitrary function in series of functions of any normal forms. Philos. Magazine (5) **38**, 125. 1894.

R. Proell, Ein Rechenschieber in Tafelform. Deutsche Mechanikerzeitung **22**, 213. 1901.

Puller, Rechenscheibe mit Glasläufer und Lupe. Zeitschr. f. Vermessungsw. **30**, 296. 1901. Zeitschr. f. Arch. und Ingenieure. Heft 2. 1900.
Rechenmaschine „Brunsviga" Braunschweig (Grimme, Natalis & Co.) 1910.
— „Gauß" Verlag von Reiß, Liebenwerda. 1905.
F. H. Reitz, Korrektur des Amslerschen Planimeters u. Konstruktion zweier neuer Varietäten desselben. Zeitschr. f. Vermessungsw. **7**, 249. 1878.
—, Theorie des Amslerschen Planimeters. Hamburg 1868.
—, Rollplanimeter Hohmann-Coradi. Zeitschr. f. Vermessungsw. **13**, 479. 1884.
Runge, Das Stangenplanimeter. Zeitschr. f. Vermessungsw. **24**, 321. 1895.
Ad. Schmidt, Ein Planimeter zur Bestimmung der mittleren Ordinaten beliebiger Abschnitte von registrierten Kurven. Zeitschr. f. Instrumentenk. **25**, 261. 1905.
Schleiermacher, Das Stangenplanimeter von Prytz. Zeitschr. f. Vermessungsw. **27**, 408. 1898.
J. Schnöckel, Graphische Integrationen. Zeitschr. f. Vermessungsw. **32**, 129. 1903.
—, Beiträge zur Flächenberechnung mit der Hyperbelglastafel. Zeitschr. f. Vermessungsw. **32**, 369. 1903.
M. Schnyder, Das Linearplanimeter Weber-Kern. Schweiz. Bauzeitung. **51**, 124. 1908.
A. Schreiber, Zur Theorie des Stangenplanimeters. Zeitschr. f. Vermessungsw. **37**, 689. 1908.
—, Das Präzisionsstangenplanimeter. Zeitschr. f. Vermessungsw. **38**, 401. 1909.
A. Schülke, Vierstellige Logarithmentafeln. 7. verb. Aufl. Leipzig u. Berlin 1909, B. G. Teubner.
J. W. G. Schulz, Die Hamannsche Rechenmaschine „Gauß". Zeitschr. f. Instrumentenk. **26**, 50. 1906.
E. Selling, Eine neue Rechenmaschine. Berlin 1887.
Semmler und Schulz, Die Rechenmaschine „Gauß" und ihr Gebrauch. Zeitschr. f. Vermessungsw. **35**, 10. 1906.
Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. 3. Aufl. v. G. Scheffers. Leipzig 1907, B. G. Teubner. Bd. 2.
A. Sharp, Harmonic analyser. Philosophical Magazine (5) **38**, 121. 1894.
H. S. H. Shaw, The theory of continuous calculating machines. Philos. Transactions of the R. Society of London. **176**. Part II, 367. London 1886.
—, Mechanical Integrators. The van Nostrand Science Series Nr. 83. New York 1886.
H. Sossna, Ergebnisse einer Zuverlässigkeitsuntersuchung mit der Rechenmaschine Brunsviga. Zeitschr. f. Vermessungsw. **30**, 636, 1901 (vgl. **28**, 665, 1899).
—, Ergebnisse einer Zuverlässigkeitsuntersuchung eines aus der Fabrik

von A. Nestler hervorgegangenen Rechenschiebers. Zeitschr. f. Vermessungsw. **34**, 657. 1905.

H. Sossna, Auflösung der Aufgabe des Einkettens mittelst Maschine und numerisch-trigonometrischer Tafel. Die neue Multiplikationsmaschine von Otto Steiger und Hans W. Egli in Zürich. Zeitschr. f. Vermessungsw. **28**, 665, 1899.

Stampfer, Über das neue Planimeter des Ingenieurs Caspar Wetli in Zürich. Sitzungsber. der math. naturw. Kl. der k. Akademie der Wissensch. zn Wien. **4**, 134. Wien 1850.

Ch. A. Vogler, Allgemeines Prinzip des Rechenschiebers. Zeitschr. f. Vermessungsw. **10**, 257. 1881.

F. A. Willers, Zum Integrator von E. Pascal. Zeitschr. f. Mathem. und Physik. **59**, 36—44. 1910.

Wilski, Rollenschiefe und Scharnierschiefe beim Amslerschen Polarplanimeter. Zeitschr. f. Vermessungsw. **22**, 609. 1892.

R. Wolf, Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie u. Astronomie. Zürich 1870. [Bd. I. S. 192. Planimeter Oppikofer usw.].

G. U. Yule, On a simple form of harmonic analyser. Philosophical Magazine. **39**, 367. 1895.

Vgl. außerdem verschiedene Literaturnachweise im Text und in den Anmerkungen.

Register.

(Die Ziffern bedeuten die Seitenzahlen.)

Abdank - Abakanowicz 157, 162, 163, 169
Abelsche Gleichung 172, 176, 177
Abwicklung 49
Adder 28
Additioneur 28
Additionsmaschine 28, 29, 53
Adiabatische Kurve 14
Ajello 172
Äquidistanzplanimeter 67, 70
Amsler 79, 82, 90, 96, 100, 118
Analysator 133, 134, 138, 140, 143, 148.
Archimedes 29
Arithmometer 29
Arithmotyp-Trinks 33
Auslöschvorrichtung 29, 48
Austria 29

Babbage 44
Barometrische Höhen 17
Barthelmes 25
Bauschinger 45
Beilschneidenplanimeter 122
Bernard 21
Bernoullische Gleichung 172
Berolina 33
Beschleunigung 62
Beyerlen 22
Billeter 21
Biquadratische Gleichung 20
Blater 40
Bollée 24, 29, 39
Boucher 22
Boys 15, 157
Breithaupt 89
Brigg 1
Brunsviga 33
Brunsvigula 33
Bryand 116
Büttner 34
Buniakowsky 100
Bunzel 29
Burkhardt 27, 29
Burrough 25, 28
Byrgi 2

Calculex 22
Cayley 157
Cercle à calcul 22
Clouth 22
Compteur 24
Le Conte 137
Contostyle 24
Coradi 64, 91, 103, 104, 105, 121, 131, 140, 141, 157
Coriolis 157

Decker 100
Delton 29
Differentialkurve 155 ff.
Differentialquotient 59
Differentialwagen 157 ff.
Differenzenmaschine 29, 44
Direktrix 155 ff.
Direktrixschiene 158 ff.
Division 10, 12, 22, 32, 54
Durand 118
Dyck 133

Edmonson 34
Egli 39
Einmaleinskörper 41 ff
Encke 169
Erleichterungstafel 40
Ernst 81
Exponentialgleichung 15
Exzentrizität 85
Euler 169
Everett 21

Faber, A. W., 5
Favaro 17
Fernel 63
Fieguth 127
Finsterwalder 133
Fleischhauer 65
Frank 16, 68
Fourier 131, 132
Französisches Kataster 17
Fürle 15, 19
Fuller 21

Gangloff 69
Gauß, C. F., 169
Gauß (Maschine) 23, 34
Genauigkeit 15, 16, 63, 66, 82, 109, 151
Generalkommission Kassel 21
Geschwindigkeit 59, 61
Goering 4
Goldman 24
Gonella 51, 78, 80, 81
Goodman 127
Grabowski 143
Gravet 4
Grundkreis 101
Groß 145
Günther 67
Gunter 3

Hahn 29, 34
Halden 22
Hamann 30, 34, 45, 53, 54, 56, 67, 82
Hammer 3, 63, 65, 69, 118
Hannyngton 17, 21
Hansen 50, 81, 111
Harfenplanimeter 67
Hart 22

Hartmann 37
Hatchet-Planimeter 122, 127
Henrici 140, 141
Hermann 22, 80, 100
Hoecken 56
Hofmann 69
Hohmann 91, 103, 104, 105
Hyperbolische Funktionen 56
Hyperbelglastafel 66
Hyperbelplanimeter 78, 88

Ideal 29
Integralkurve 130, 155 ff.
Integrallogarithmus 169
Integralwagen 157 ff.
Integratore meccanico 161

Jacob 64, 172, 176
Jordan 21

Kartometer 65
Kegelräder 26, 27, 42
Kelvin 138, 172
Kern 127
Kewitsch 2
Kloht 111
Kloth 66
Klott 21
Knudsen 122
Kohlmorgen 114
Kombiniertes Planimeter 111
Kompensationsplanimeter 130
Kompensationspolarplanimeter 110
Kontrollineal 84, 99
Koordinatenplanimeter 77, 82, 99
Krauß 63
Kronecker 169
Kubikwurzel 13
Kubische Gleichung 20
Kubus 13
Küntzel 142
Küttner 34

Kugelpolarplanimeter 105
Kugelrollplanimeter 96
Kurvenzylinder 116, 139

Längenteilung 8, 16
Läufer 4, 14, 69
Lambert 4
Lanchester 14
Leibniz 25, 29, 33
Lenoir 4
Linearplanimeter 87, 89, 90, 91, 99, 109
Lippincott 127
Logarithmen 1, 2, 8, 10, 45, 56
Logarithmischer Rechenschieber 1
Logistik 2
Lüdemann 22, 66

Mannheim 4, 21
Martiny 14
Maxwell 52, 100
Mayer 25, 64
Mehmke 22, 33
Mercedes-Euclid 30
Merkur 33
Meyer 22
Michelson 148
Miller v. Hauenfels 89, 100
Millionär 39
Mönkemöller 67, 70
Momentenplanimeter 118, 121
Monopol 33
Müller, C. H., 2
Müller, J. H., 29, 34
Multiplikation 10, 12, 21, 40, 54
Multiplikationsmaschine 29, 37, 39, 44
Multiplikationsmechanismus 40

Napier 2
Nautischer Rechenstab 17
Nelting 17

Neper s. Napier 40
Nestler 4, 16
Netto 169
Nürnberger Scheere 37

d'Ocagne 156
Odhner 23, 33
Oldendorp 67
Omnimeter 22
Oppikofer 81
Optisches Planimeter 129
Ordinatenkreis 108
Ordnungsziffer 9
Ott 65
Oughtred 3

Panintegrimeter 114
Pascal, B., 24, 25
Pascal, E., 161, 169, 170, 171, 172
Patridge 3
Peerless 29
Peters 45
Petrovitch 172
Planimeter für Kugel 110
Planimeterhaarzirkel 67
Planimeterschieber 68
Planimeterzirkel 67
Platzbecker 63
Polarintegraph 171
Polarplanimeter 79, 99, 100, 109
Poncelet 51
Potenz 14
Präzisionsplanimeter 103, 104, 105, 109
Pregél 129
Proell 21
Progreßstab 2
Proportionalhebel 30
Proportionalrechenschieber 53
Prüfung des Rechenschiebers 15
Proportionalrechnung 12
Proportior 22
Prytz 122, 128, 131, 172
Puller 22

Quadratbildung 12, 17
Quadratische Gleichung 11
Quadratmillimeterglastafel 66
Quadratwurzel 13, 17, 55

Radial cursor 14
Radialplanimeter 118
Rechenknecht 22
Rechenkreis 22
Rechenräder 22
Rechenscheiben 22
Rechenschieber 22, 23, 133
Rechenstäbe 1, 40
Rechentafeln 21
Rechenwalzen 21
Registrierwerk 40, 63
Registrierzylinder 139
Reitz 93
Rektifizierrädchen 63
Reuleaux 25
Riccatische Gleichung 172, 173
Riffelung 76
Roether 22
Rollen-Kugel-Mechanismus 51, 54, 55, 56, 61, 97, 105, 110, 139, 142, 143
Rollen-Scheiben-Mechanismus 50, 59, 78, 81, 91, 103, 104, 112, 117, 118, 119, 139, 146
Rollenschiefe 85
Rollplanimeter 88, 91
Roth 28
Runge 123

v. Sanden, H., 128
Sandor 64
Sang 87
Saxonia 29
Scharnierschiefe 86, 111
Scherer 21
Schieber s. Zunge 3
Schlagintweit 64
Schlesinger 69
Schmidt, A., 116, 133
Schnöckel 122, 129
Schreiber 133
Schütz 45
Selling 37, 39
Semmler 67
Sexton 22
Sharp 141, 143
H-Shaw 54, 59, 62, 121
Sinusskala 6, 18
Smollin 78
Soho rules 3
Soldner 169
Sommerfeld, A., 145
Sonne 22
Sresnewsky 17
Stadler 78, 80, 88
Staffelwalze 25, 26
Stangenplanimeter 122, 129
Stanley 21
Starke 81
Statisches Moment 119, 120, 122, 161
Steiger 39
Steinhauser 22
Stellhebel 33
Strachey 133
Stratton 148
Stufenscheibe 35

Tachymetrische Skalen 17
Tangens-Teilung 6, 8, 18
Taschenrechenschieber 5
Taschenschnellrechner 22
Tavernier 4
Terada 152
Tesdorpf 65
Thacher 21
Thomas 27, 29, 41
Thomson s. Kelvin 138, 140, 157
Tim 29
Torrès 172
Trägheitsmoment 119, 121, 122, 126, 162
Trigonometrische Funktionen 56
Trinomische Gleichung 20
Triumphator 33

Übertragungsmechanismus 40
Übertragungsvorrichtung 24 s. Zehnerübertragung
Umfahrungsfehler 109
Unitas 29

Verwandlungsplanimeter 69
Vinay 4
Volkmann 145

Waelzen 52
Wahrscheinlichkeit 162
de Wal 68
Warnungszeichen 29, 31
Watt 3
Webb 28
Weber 22, 127
Weltausstellung Brüssel 21
Wetli 81, 86, 111
Wiberg 45
Wichmann 4, 22
Wiechert 145
Wingate 3
Wittmann 63
Wolf 64
Wurzelziehung 14, 55

Yule 134, 135

Zählwerk 23, 31, 33, 36, 48, 49
Zehnerübertragung 24, 27, 38, 41, 48
Zenitdistanz 18
Zinseszinsrechnung 20
Zirkeladdition 67
Zmurko 157
Zunge 3, 17, 69

Druck von B. G. Teubner in Leipzig

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Wirkungsweise und Gebrauch des Mikroskops und seiner Hilfsapparate.

Von Prof. Dr. **W. Schoffer.** Mit 89 Abbildungen und 3 Blendenblättern. 1911. Geh. *M.* 2.40, in Leinwand geb. *M.* 3.—

Auf fast allen Gebieten der Naturwissenschaften und der Technik ist das Mikroskop ein wichtiges — häufig ein unentbehrliches — Hilfsmittel geworden. Zum Verständnis und zur richtigen Anwendung des Mikroskops sind einige physikalische Kenntnisse nötig. Im vorliegenden Buche werden die notwendigen physikalischen Grundlagen möglichst allgemeinverständlich und einfach vorgetragen, so daß jeder Gebildete der Darstellung leicht folgen kann. Durch eine größere Anzahl von Figuren, sowohl Zeichnungen als auch Mikrophotogrammen wird das Verständnis dem Leser erleichtert. Die Beschreibung einer Reihe einfacher Experimente gibt dem Leser Gelegenheit, die Vorgänge in praxi wahrzunehmen. Die Erscheinungen in der hinteren Brennebene, deren Kenntnis für das Verständnis des Mikroskops ganz besonders wichtig ist, werden durch Experimente mit den dem Buche beigegebenen Blendenblättern auf einfache Weise klargemacht.

Maschinen und Apparate der Starkstromtechnik, ihre Wirkungsweise und Konstruktion.

Ein Lehrbuch für den Gebrauch an technischen Lehranstalten, zum Selbststudium und für den in der Praxis stehenden Ingenieur. Von Elektroingenieur **G. W. Meyer.** I. Teil: Gleichstrom II. Teil: Wechselstrom. Mit 772 Figuren. Geh. *M.* 15.—, geb. *M.* 16.—

Will dem Studierenden wie dem in der Praxis stehenden Ingenieur schnelle und zuverlässige Information über den Stand des Baues moderner elektrischer Maschinen und Apparate sowie über die bei der Konstruktion derselben zu beachtenden Gesichtspunkte bieten. Soweit zum Verständnis der betreffenden Maschinen und Apparate erforderlich, wurde auch auf die Theorie derselben kurz eingegangen. Zu dem gleichen Zwecke dient eine große Zahl graphischer Reproduktionen.

Populäre Astrophysik.

Von Dr. **J. Scheiner,** Professor der Astrophysik an der Universität Berlin, Hauptobservator am Astrophysikalischen Observatorium bei Potsdam. Mit 30 Tafeln und 210 Figuren. gr. 8. 1908. In Leinwand geb. *M.* 12.—

„... Sein Hauptvorzug besteht darin, daß es den Leser zunächst auf das sorgfältigste mit den astrophysikalischen Methoden und Instrumenten vertraut macht; fast die Hälfte des Buches ist diesem Zweck gewidmet. Dadurch ist es aber nicht etwa zu einem Handbuch für den Fachmann geworden, nein, es ist eine gemein-verständliche Darstellung im besten Sinne des Wortes für den großen Kreis der Gebildeten. Mathematische Betrachtungen, die nun einmal nicht zu entbehren sind, werden nicht ängstlich vermieden; sie gehen aber nirgends über den Standpunkt eines Gymnasialprimaners hinaus. Überall schöpft der als hervorragender Forscher bekannte Verfasser aus dem vollen." **(Monatsschrift für höhere Schulen.)**

Geodäsie.

Eine Anleitung zu geodätischen Messungen für Anfänger mit Grundzügen der direkten Zeit- und Ortsbestimmungen. Von Dr.-Ing. **H. Hohenner,** Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt. Mit 216 Figuren. 1910. In Leinwand geb. *M.* 12 —

Das Buch soll für die meisten technischen Zwecke ausreichen und zwischen den umfangreichen Handbüchern und den kleinen Leitfaden stehen. Deshalb wurden die Grundzüge der Wassermengen- und Wasserkraftmessung in Wasserläufen aufgenommen, und auch die Beschreibung einiger Methoden zur direkten (astronomischen) Bestimmung der geographischen Koordinaten von Punkten der Erdoberfläche sowie der Azimute terrestrischer Richtungen mit Hilfe des Theodolits wird manchem erwünscht sein. Der Beschreibung sowie der Berichtigung der Meßinstrumente ist verhältnismäsig viel Raum zugewiesen, weil erfahrungsgemäß das Entstehen unbrauchbarer Messungen am meisten durch ungenügendes Vertrautsein mit dem Meßgeräte begünstigt wird. Die Messungs- und Berechnungsarten sind durch viele Zahlenbeispiele erläutert, und auch an Figuren zur Unterstützung des Textes ist nicht gespart.

„... Die Darlegungen sind sämtlich klar und auch dem Anfänger wohl leicht verständlich; sie werden durch zahlreiche Figuren erläutert und dürften besonders für die Studierenden der Feldmeßkunst wertvoll sein. Hier liegt vielmehr die Hauptbedeutung in der Art der Darstellung eines schon häufig behandelten Stoffes, und diese Darstellung verdient in diesem Falle das höchste Lob." **(Literarisches Zentralblatt für Deutschland.)**

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Lehrbuch der Physik. Zum Gebrauch beim Unterricht, bei akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium von **E. Grimsehl**, Direktor der Oberrealschule auf der Uhlenhorst in Hamburg. Mit 1293 Textfiguren, 2 farbigen Tafeln und einem Anhange, enthaltend Tabellen physikalischer Konstanten und Zahlentabellen. 2. Auflage. 1912. Geh. *M.* 15.—, in Leinwand geb. *M.* 16.—

„... In erster Linie sei hier das Werk von ‚Grimsehl' erwähnt, nach Auffassung und Durchführung wohl das größte und schönste Lehrbuch der Experimentalphysik, welches an höheren Schulen benutzt werden soll. Wir können stolz darauf sein, daß ein Fachkollege hier ein Werk vorlegt, welches als Handbuch der Physik den angehenden Studenten dieses Faches ebensowohl wie den Medizinern, Chemikern und Pharmazeuten meiner Überzeugung nach bessere Dienste leisten kann und wird als verschiedene bekannte Lehrbücher, die wir seinerzeit auf der Universität in Händen hatten. ..."

(Korrespondenz-Blatt für den akademisch gebildeten Lehrerstand.)

„Was es für diese Zwecke besonders geeignet macht, ist die hervorragend klare und anregende Art der Darstellung. Jeder Abschnitt geht von einfachen Beobachtungen und leicht anzustellenden Versuchen aus. Über tausend Abbildungen, zumeist sind es recht charakteristische schematische Zeichnungen, unterstützen den Text in wirksamer Weise. ... Mit einem Worte, das Buch verdient in wissenschaftlicher, methodischer und didaktischer Hinsicht volle Anerkennung."

(Natur und Erziehung.)

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben von **Felix Auerbach** und **Rudolf Rothe.** II. Jahrgang 1910/11. Mit einem Bildnis Hermann Minkowskis. 1911. In Leinwand geb. *M.* 7.—

Das Taschenbuch enthält Angaben über Personalien, Literatur, Praktisches usw., hauptsächlich aber ein Gerippe des Tatsachenmaterials der mathematischen und physikalischen Wissenschaften, zu denen noch Astronomie, Geodäsie, Elektrotechnik und physikalische Chemie als Annexe hinzugefügt wurden, um allseitigen Bedürfnissen entgegenzukommen. Die bei der ersten Herausgabe des Werkes geäußerte Annahme, es komme einem dringend empfundenen Bedürfnisse entgegen, hat bei Publikum und Kritik eine volle Bestätigung gefunden, und das Buch hat sich als praktisches Hilfsmittel bei Mathematikern, Physikern und Angehörigen verwandter Gebiete rasch verbreitet. Bei der Herausgabe des zweiten Jahrgangs hat sich die Notwendigkeit herausgestellt, daß in die Redaktion ein zweiter, mathematischer Herausgeber eintrat, und daß dieser eine völlige Neubearbeitung des mathematischen Teiles in die Wege leiten mußte. Auch der physikalische, astronomische und chemische Teil enthält, unter Fortlassung einzelner Abschnitte des ersten Jahrganges, sehr viel des Neuen; daß im übrigen Mängel des früheren Textes beseitigt und berechtigte Wünsche aus dem Leserkreise beachtet wurden, versteht sich von selbst. Außerdem hat sich das Taschenbuch diesmal der Mitwirkung einer größeren Anzahl von Fachgenossen zu erfreuen, die es in dankenswerter Weise übernahmen, gewisse besondere aktuelle Kapitel in Sonderdarstellungen vorzuführen. [Jahrgang III erscheint im November 1912.]

„... Die Reichhaltigkeit und Vielseitigkeit, die sich schon beim Durchblättern zeigen, und die Gediegenheit des Inhalts, die sich dem eingehenderen Studium erschließt, machen im Verein mit der übersichtlichen Stoffanordnung das Taschenbuch zu einem Orientierungsmittel von großer Verwendbarkeit und Zuverlässigkeit; jedem Freunde der exakten Wissenschaften kann daher die Anschaffung des vorzüglichen Buches angelegentlich empfohlen werden."

(Naturwissenschaftliche Wochenschrift.)

Kröhnkes Taschenbuch zum Abstecken von Kurven auf Eisenbahn- und Wegelinien. 15. Auflage, bearbeitet von **R. Seifert,** Kgl. Regierungsbaumeister. Mit 15 Abbildungen. 16. 1911. In Leinwand geb. *M.* 2.—

Das seit 1851 in fünfzehn Auflagen erschienene „Taschenbuch" soll die beim Abstecken von Bögen in Eisenbahn- und Wegelinien erforderlichen Rechnungen nach Möglichkeit erleichtern und vor Fehlern sichern. Als Hauptverfahren ist die Absteckung von Bogenpunkten gleichen Abstands von der Tangente aus mit rechtwinkligen Koordinaten zugrunde gelegt. Die Einleitung enthält die hierfür nötigen mathematischen Entwicklungen und Hinweise auf die zur Aushilfe dienenden anderen Verfahren der Absteckung; auch Korbbögen und Übergangsbögen von Eisenbahnlinien sind in die Betrachtung einbezogen worden. Ferner ist eine Anleitung zur Winkelmessung in dem für Bogenabsteckung erforderlichen Umfang und zur Prüfung und Berichtigung des Theodoliten gegeben.

Die eigentlichen Zahlentafeln sind in 3 Abteilungen gegliedert; Tafel I enthält alle Werte zur Berechnung der Tangentenlängen und der Kontrollen der Absteckung, Tafel II alle Ordinaten und Abszissen zur Bogenabsteckung, Tafel III das Winkelmaß für bestimmte Bogenlängen. Der Umfang der Tafeln bezüglich der Abstufung der Halbmesser von 20 bis 10000 m, der Winkel von 10 zu 10 Minuten und der Länge der Ordinaten bis zu 100 m dürfte allen Anforderungen der Bequemlichkeit der Rechnung und der Genauigkeit genügen.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

H. Wiener und P. Treutleins Sammlung mathematischer Modelle für Hochschulen, höhere Lehranstalten und technische Fachschulen.

Die Modelle sind für den geometrischen Unterricht bestimmt und sollen dem Lernenden Raumformen und geometrische Beziehungen durch einfache und übersichtliche Darstellung anschaulich machen. Das Preisverzeichnis mit Figuren und Tafeln nach photographischen Aufnahmen der Modelle ist durch den Verlag unberechnet zu beziehen.

Die elementare Mechanik.

Ein Lehrbuch: Enthaltend: Eine Begründung der allgemeinen Mechanik; die Mechanik der Systeme starrer Körper; die synthetischen und die Elemente der analytischen Methoden sowie eine Einführung in die Prinzipien der Mechanik deformierbarer Systeme. Von **Georg Hamel**, Professor an der Deutschen Technischen Hochschule zu Brünn. Mit 265 Figuren. 1912. Geh. *M.* 16.—, in Leinwand geb. *M.* 18.—

Das Buch enthält die Grundlagen einer allgemeinen Mechanik sowie die Stereomechanik, hingegen nicht die Mechanik der deformierbaren Körper. Behandelt es auch in seinen Beispielen hauptsächlich technische Probleme, so ist es doch keine eigentliche technische Mechanik, sondern hat vor allem eine Darstellung der allgemeinen Mechanik zum Ziel. Der erste Abschnitt entwickelt ausführlich den kinetischen Kraftbegriff, der zweite enthält die Statik, der dritte baut die allgemeine Mechanik auf die Theorie der Volumelemente auf und geht in die Systemmechanik bis zu den Lagrangeschen Gleichungen. Die beiden letzten Paragraphen zeigen, wie sich die Begründung der Mechanik deformierbarer Körper an die allgemeinen Grundlagen anschließt

Theoretische Mechanik.

Von Dr. **R. Marcolongo**, Professor an der Universität Neapel. Deutsch von **H. E. Timerding**, Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig 2 Bände. gr. 8. Geh. je *M.* 10 —, in Leinwand geb *M.* je *M* 11.—. I. Band: Kinematik und Statik. Mit 110 Figuren. 1911. II. Band: Dynamik und Mechanik der deformierbaren Körper. Mit 38 Fig. 1912.

„... Dem Werke kommt sehr zustatten, daß der Verfasser von vornherein darauf verzichtet hat, den Stoff erschöpfend zu behandeln. Er bringt nur eine Auswahl der interessantesten Gebiete. Als besonderer Vorzug muß weiter hervorgehoben werden, daß jedem Kapitel eine reichliche Anzahl von Übungsbeispielen mit Auflösungen beigefügt ist, an Hand derer sich der Leser vergewissern kann, ob er den Inhalt des Kapitels wirklich ganz erfaßt hat. Das Buch wird sich sicher in den Kreisen der Ingenieure viel Freunde erwerben. Es ist so abgefaßt, daß auch der Ingenieur, soweit er für die Theorie Interesse hat, vieles Nützliche darin findet. Die theoretische Mechanik von Marcolongo-Timerding kann deshalb bestens empfohlen werden." **(Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.)**

Vorlesungen über technische Mechanik.

In 6 Bänden. Von Dr. **August Föppl**, Professor der Mechanik und Vorstand des Mechan.-Techn. Laboratoriums an der Techn. Hochschule in München. I. Einführung in die Mechanik. 4. Aufl. Mit 104 Figuren. 1911. *M.* 10.— II. Band. Graphische Statik. 3. Aufl. 1912. Mit 209 Fig. *M.* 8.—. III. Band. Festigkeitslehre. 4. Aufl. Mit 86 Fig. 1910. *M.* 10.—. IV. Band. Dynamik. 3. Aufl. Mit 71 Fig. 1909. *M.* 10.—. V. Band. Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. Mit 44 Fig. 1907. *M.* 10.—. VI. Band. Die wichtigsten Lehren der höheren Dynamik. Mit 30 Fig. 1910. *M.* 12.—

„Föppl versteht die Kunst, mit klaren und interessanten Worten, gestützt auf geistreich gewählte Beispiele, auseinanderzusetzen, was die Formel kurz aber trocken zusammenfaßt. Man gewinnt daraus auf die angenehmste Art Einsichten, die sich sonst hinter langen Formelentwicklungen verbergen. Die Auseinandersetzungen werden bei Föppl zwar äußerlich länger als in der knappen Formelsprache anderer Bücher, die zum Verständnis nötige Zeit wird aber kürzer. Das sind Vorzüge, die für den Praktiker schwerer ins Gewicht fallen, als die bei früheren Auflagen aus mathematischen Kreisen geäußerten Bedenken gegen die Korrektheit mancher Entwicklungen." **(Elektrotechnische Zeitschrift.)**

Angewandte Mechanik.

Von **John Perry**, F. R. S. Ein Lehrbuch für Studierende, die Versuche anstellen und numerische und graphische Beispiele durcharbeiten wollen. Berechtigte deutsche Übersetzung von Ingenieur **Rudolf Schick** in Cöln. Mit 371 Figuren. 1908. In Leinwand geb. *M.* 18.—

„Aus diesem Werke spricht ein Lehrer allerersten Ranges, der ausgedehnte Kenntnisse mit vollendeter Lehrkunst vereinigt. Er hat aus dem großen Wissengebiete der technischen Mechanik viele hundert Beispiele zusammengetragen, an welchen er die Grundgesetze anschaulich erläutert, und damit ein echtes Lehrbuch geschaffen, dessen Übersetzung sich bald zahlreiche Freunde erwerben wird. Alle Darlegungen sind unmittelbar auf den praktischen Gebrauch zugeschnitten, und der mathematische Apparat ist in möglichst engen Grenzen gehalten; vorausgesetzt wird lediglich die Kenntnis der niederen Analysis." **(Literarisch. Zentralblatt.)**

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Über die Theorie des Kreisels. Von **F. Klein** und **A. Sommerfeld.** 4 Hefte. gr. 8. I. Heft. Die kinematischen und kinetischen Grundlagen der Theorie. 1897. Geh. *M.* 5.60, geb. *M.* 6.60. II. Heft. Durchführung der Theorie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. 1898. Geh. *M.* 10.—, geb. *M.* 11.—. III. Heft. Die störenden Einflüsse. Astronomische und geophysikalische Anwendungen. 1903. Geh. *M.* 9.—, geb. *M.* 10.—. IV. Heft. Die technischen Anwendungen der Kreiseltheorie. 1910. Geh. *M.* 8.—, geb. *M.* 9.—

„In klarer und, soweit bei diesem Stoff überhaupt möglich, auch anschaulicher Weise sind zuerst allgemeine Auseinandersetzungen über Stabilierung gegeben und dann die einzelnen Anwendungen besprochen, u. a. die Kreiselwirkungen bei Schnellbahnen, der Geradlaufapparat der Torpedos, der Schlicksche Schiffskreisel, der Kreiselkompaß, die Stabilität des Fahrrades sowie einige Bemerkungen über Einschienenbahnen, die Stabilierung von Flugzeugen und die Kreiselwirkungen bei Geschossen. Die wichtigeren dieser Anwendungen sind in theoretischer wie praktischer Beziehung eingehend und überaus klar auseinandergesetzt, wobei noch besonders anerkannt werden soll, daß überall auf die Grenzen der Gültigkeit der Formeln und auf die zu ihrer Herleitung erforderlichen Vernachlässigungen hingewiesen ist und der entstehende Fehler wenigstens seinem Sinne nach angegeben wurde, wenn seine Größe sich nicht abschätzen ließ. Die Diskussion der Differentialgleichungen für den Schiffskreisel soll als Beispiel einer eleganten Behandlung, einer eingehend durchgearbeiteten Aufgabe sowie der Abschnitt über Ballistik als Beispiel einer vorzüglichen Klarlegung eines noch nicht gelösten Problems hervorgehoben werden..." (Dinglers Polytechn. Journ.)

Technische Statik. Vorlesungen über die Theorie der Tragkonstruktionen von **A. Ostenfeld,** Professor an der Technischen Hochschule zu Kopenhagen. Deutsche Ausgabe von **D. Skouge.** 1904. Geb. *M.* 12.—

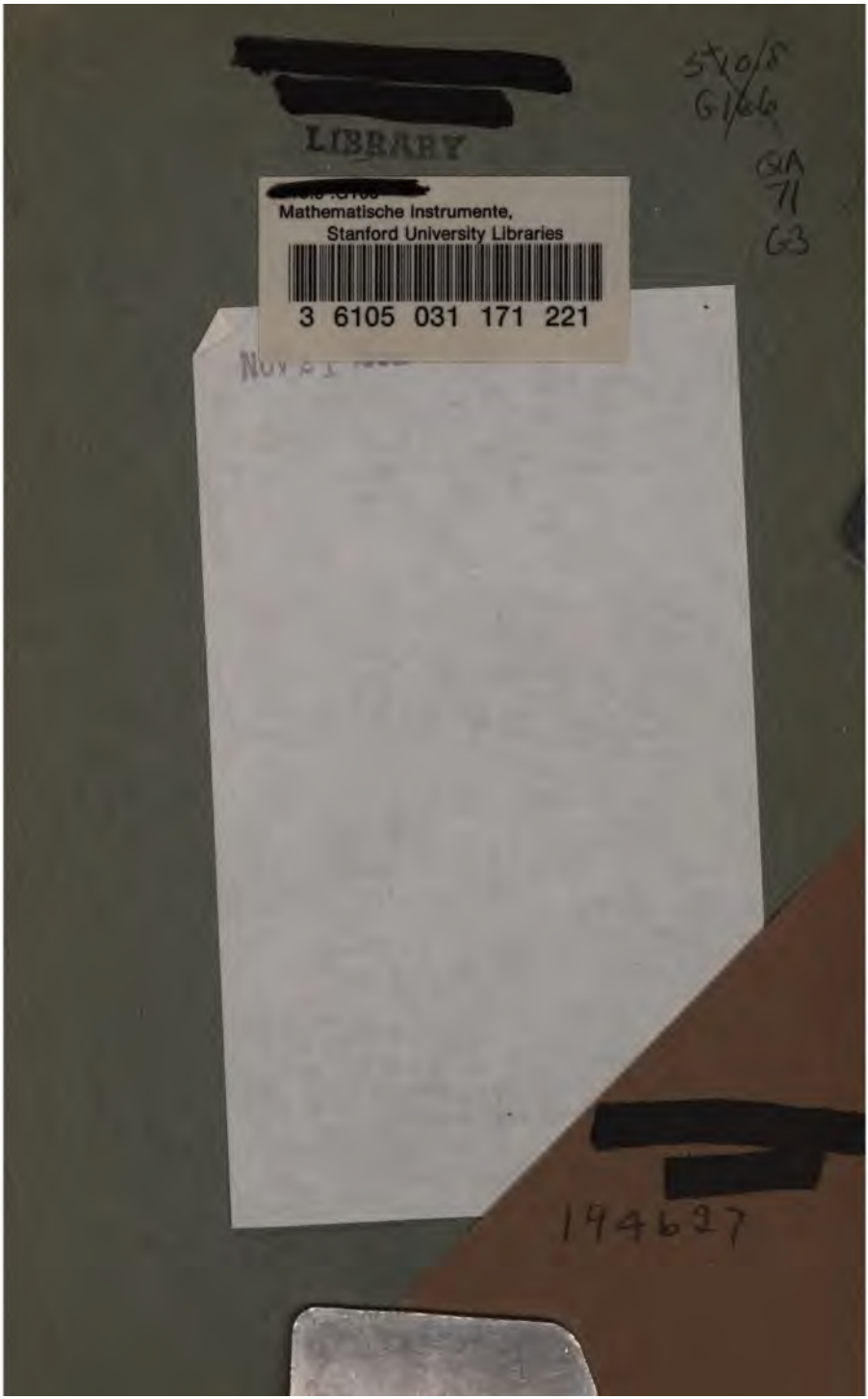
Das Werk trägt seinem Inhalt und seiner Behandlung des Stoffes nach — die in der Regel sowohl zeichnerisch wie rechnerisch durchgeführt ist — den Bedürfnissen von Hörern an technischen Hochschulen sowie von Ingenieuren der Praxis Rechnung. Dabei werden die allgemeine technische Elastizitätslehre sowie die ersten Elemente der graphischen Statik als bekannt vorausgesetzt.

Nach Vorausschickung dreier einleitender Abschnitte, in denen die Eigenschaften und Anwendungen der Einflußlinien sowie die einfach unterstützten vollwandigen Träger und Fachwerkbalken bei ruhender und beweglicher Belastung behandelt werden, wird im vierten Abschnitt die allgemeine Theorie der Tragkonstruktionen einheitlich — für statisch bestimmte und unbestimmte Systeme — mit Hilfe der virtuellen Verschiebungen aufgebaut. Ein fünfter Abschnitt gibt das Wesentlichste über die verschiedenen Fachwerkformen, wobei auch die in den letzten Jahren entstandenen Formen, K-Fachwerk, halbe Diagonalen, behandelt werden.

„... Das ganze Werk ist durch eine wohltuende Klarheit ausgezeichnet. Mit richtigem Gefühl hat es Verfasser verstanden, allzu weitgehende, uferlose theoretische Abhandlungen zu unterlassen. Dadurch wird die dem Anfänger oft schwer verdauliche Kost schmackhaft geboten, wodurch das Verständnis wesentlich gefördert und beim Leser die Lust zur Weiterarbeit geweckt wird. Die Übersetzung ist gut gelungen, so daß man die Abstammung des Buches aus einem außerdeutschen Lande kaum bemerkt. Sehr praktisch ist die Anordnung der Figuren in einem besonderen dünnen Heft, welches durch einen Einschub mit dem Text fest verbunden werden kann." (Technische Literatur.)

The Dynamics of Particles and of Rigid, Elastic, and Fluid Bodies; being Lectures on Mathematical Physics. By Professor **A. G. Webster.** 2. Auflage. 1912. gr. 8. In Leinwand geb. *M.* 14.—

Die dem Buche dies- und jenseits des Ozeans bereitete günstige Aufnahme beweist, daß es einem Bedürfnis entspricht und seine Aufgabe, in gedrängter Form die dem Studenten der Physik und Mathematik nötigen hauptsächlichsten Methoden und Ergebnisse der allgemeinen Mechanik darzubieten, wohl erfüllt. Der Student lernt aus dem Buche zugleich das Prinzip der Energie, das Prinzip der kleinsten Wirkung und die Lagrangeschen Gleichungen in verallgemeinerten Koordinaten kennen, die ihm die Mittel zur Lösung praktischer Aufgaben an die Hand geben. Der zweite Teil des Buches ist der Bewegung der starren Körper gewidmet und dabei ein recht erheblicher Raum der Bewegung rotierender Körper einschließlich der praktischen Anwendungen des Gyroskopes zugewiesen. Der dritte Teil behandelt die Mechanik der kontinuierlichen Systeme, eingeleitet durch die Attraktionstheorie, in welcher das Newtonsche und Logarithmische Potential den Studierenden zur Bekanntschaft mit den partiellen Differentialgleichungen und bestimmten Integralen überleiten. Darauf folgt die Behandlung der linearen Vektorfunktionen mit Anwendung auf Bruch und Zug. Die einfacheren Probleme der Elastizität werden in Verbindung mit der Biegung und Windung des Stabes nach St. Venant abgehandelt. In der Hydrodynamik schließt sich der Wirbel- und Wellenbewegung eine Einführung in die Theorie der Gezeiten an.


[redacted]
LIBRARY
[redacted]
Mathematische Instrumente,
Stanford University Libraries
3 6105 031 171 221
5T10/5
G166
QA
71
G3
[redacted]
194627